Департамент освіти й науки Запорізької облдержадміністрації
Запорізький обласний інститут післядипломної педагогічної освіти
ІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2018-2019 н.р.
10 клас

1. Про натуральне число n відомо: число більше 2000; якщо від нього відняти два і до отриманого числа дописати справа будь-яку ненульову цифру c, то одержане нове число буде ділитись націло на c. Знайдіть найменше значення, яке може приймати число n.

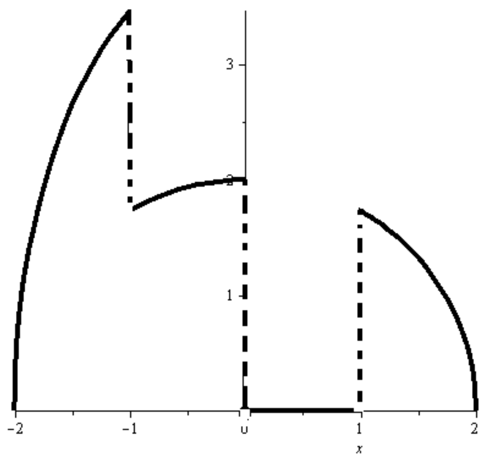
Розв'язання. Помітимо, що якщо до числа m дописати справа цифру c, то ми отримаємо число $10m+c$. Для того, щоб це число ділилось на c, необхідно й достатньо, щоб $10m$ ділилося на c. Тобто, для того, щоб виконувалась умова необхідно, щоб $10m$ ділилося на всі натуральні число від 1 до 9. Для будь-якого натурального m число $10m$ буде ділитися на 1, 2 та 5. Для подільності на інші цифри, треба щоб число m ділилося на 4, 7 та 9. Але тоді воно повинно ділитись на $4\cdot 7\cdot 9=252$, тому менше ніж 252 число m бути не може. Нескладно переконатися, що число $252*8=2016$ задовольняє умові «більше 2000», а тому шуканим числом є $n=m+2=2018$. ***Відповідь***: $n=2018$.

2. Побудуйте графік функції $y=\frac{[x]}{x}\cdot\sqrt{4\cdot x^2-x^4}$. Тут $[x]$ – ціла частина дійсного числа x – найбільше ціле число, яке не більше x Наприклад $[3]=3,\ [3{,}12]=3,\ ,[-2{,}6]=-3,\ ,[-0{,}001]=-1$.

Розв'язання.

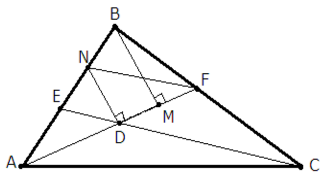
$y=\frac{[x]}{x}\cdot\sqrt{4\cdot x^2-x^4}=\frac{[x]}{x}\cdot|x|\sqrt{4-x^2}$. ОДЗ $\begin{cases}4-x^2\ge 0,\\ x\ne 0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\le x\le 2,\\ x\ne 0,\end{cases}$

$$\begin{cases}[x]=-2,\ |x|=-x,\ -2\le x<-1\\ [x]=-1,\ |x|=-x,\ -1\le x<0\\ [x]=0,\ |x|=x,\ 0<x<1\\ [x]=1,\ |x|=x,\ 1\le x<2\\ [x]=2,\ |x|=x,\ x=2\end{cases}$$



$$y=\frac{[x]}{x}\cdot|x|\sqrt{4-x^2}=\begin{cases}2\cdot\sqrt{4-x^2},\ -2\le x<-1\\ \sqrt{4-x^2},\ -1\le x<0\\ 0,\ 0<x<1\\ \sqrt{4-x^2},\ 1\le x<2\\ 0,\ x=2\end{cases}$$

3. *Нехай AF - медіана трикутника ABC, D - середина AF, E - точка перетину прямої CD зі стороною AB, $BD = BF = CF$. Доведіть, що $AE = DE$.*



***Розв'язання*.** Нехай M – середина DF, N – середина BE, $BM \perp AF$ і $ED \| NF$. Оскільки $AD = DF$, то $AE = EN$, а з того, що $BF = FC$, випливає, що $EN = NB$. $AD : AM = 2:3$ і $AN : AB = 2:3$, то $ND \| BM$, тобто ND - висота трикутника ANF. Оскільки вона є і медіаною, то трикутник ANF - рівнобедрений. Врахувавши паралельність ED і NF, отримаємо, що трикутник AED також рівнобедрений.

4. *Розв'язати нерівність:* $$\frac{1+\dfrac{2\cdot\dfrac{1-x}{1-3x}}{1-3\cdot\dfrac{1+x}{1-3x}}}{1-3\cdot\dfrac{1+\dfrac{1+x}{1-3x}}{1-3\cdot\dfrac{1+x}{1-3x}}}<\frac{1-3\cdot\dfrac{1+\dfrac{1+x}{1-3x}}{1-3\cdot\dfrac{1+x}{1-3x}}}{1+\dfrac{1+\dfrac{1+x}{1-3x}}{1-3\cdot\dfrac{1+x}{1-3x}}}$$

***Розв'язання*. ОДЗ** $1-3x\neq 0,\ 1-3\cdot\dfrac{1+x}{1-3x}\neq 0,\ 1+\dfrac{1+\dfrac{1+x}{1-3x}}{1-3\cdot\dfrac{1+x}{1-3x}}\neq 0,\ 1-3\cdot\dfrac{1+\dfrac{1+x}{1-3x}}{1-3\cdot\dfrac{1+x}{1-3x}}\neq 0$.

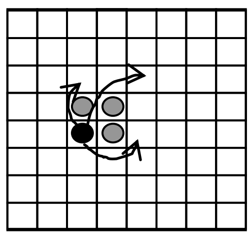
$$1-3\frac{1+x}{1-3x}=\frac{-2-6x}{1-3x}\neq 0,\ 1+\frac{1+\dfrac{1+x}{1-3x}}{1-3\cdot\dfrac{1+x}{1-3x}}=\frac{4x}{1+3x}\neq 0,\ 1-3\cdot\frac{1+\dfrac{1+x}{1-3x}}{1-3\cdot\dfrac{1+x}{1-3x}}=\frac{4}{1+3x}\neq 0\ \textbf{ОДЗ}\ x\neq\frac{1}{3},\ x\neq-\frac{1}{3},\ x\neq 0.$$

$2\cdot\dfrac{1-x}{1-3x}=\dfrac{2-2x}{1-3x}=\dfrac{1-3x+1+x}{1-3x}=\dfrac{1-3x+1+x}{1-3x}=1+\dfrac{1+x}{1-3x}$. Враховуючи це перепишемо отримаємо

$$\frac{1+\dfrac{1+\dfrac{1+x}{1-3x}}{1-3\cdot\dfrac{1+x}{1-3x}}}{1-3\cdot\dfrac{1+\dfrac{1+x}{1-3x}}{1-3\cdot\dfrac{1+x}{1-3x}}}<\frac{1-3\cdot\dfrac{1+\dfrac{1+x}{1-3x}}{1-3\cdot\dfrac{1+x}{1-3x}}}{1+\dfrac{1+\dfrac{1+x}{1-3x}}{1-3\cdot\dfrac{1+x}{1-3x}}},\ \Rightarrow\ \frac{\dfrac{4x}{1+3x}}{\dfrac{4}{1+3x}}<\frac{\dfrac{4}{1+3x}}{\dfrac{4x}{1+3x}}\ \Rightarrow\ \frac{x}{1}<\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{(x-1)(x+1)}{x}<0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)\\ x\neq\pm\dfrac{1}{3},\quad x\neq 0\end{cases}$$ **Відповідь:** $x\in(-\infty;-1)\cup\left(0;\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3};1\right)$

5. *У лівий нижній кут шахівниці 8×8 поставлено у формі квадрата 3×3 дев'ять фішок. Фішки вважаються такими, що стоять поруч, якщо клітинки, в яких вони стоять мають спільну точку (спільна сторона, спільна*



вершина). Фішка може стрибати на вільне поле через фішку, що стоїть поруч, симетрично відносно її центра (стрибати можна по вертикалі, горизонталі й діагоналі). Чи можна за деяку кількість таких ходів поставити всі фішки знову у формі квадрата 3×3, але в іншому куті: а) лівому верхньому, б) правому верхньому?

Розв'язання. Розфарбуємо дошку смугами: непарні горизонталі - білим, парні - чорним. Роблячи хід, фішка не міняє кольори поля, на якому розташована. В початковому розміщенні фішки займають шість білих полів і три чорних, а в кінцевому - три чорних і шість білих. Отже, відповідь в обох пунктах негативна.

На виконання роботи відводиться 4 години
Кожне завдання оцінюється в 7 балів
Використання калькуляторів не дозволяється