Департамент освіти й науки Запорізької облдержадміністрації
Запорізький обласний інститут післядипломної педагогічної освіти
ІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2018-2019 н.р.

9 клас

1. *Розв'яжіть нерівність* $7^n + 8^n < 9^n$, *де* $n \in N$.

Розв'язання. Поділимо на 9^n, отримаємо $\frac{7^n}{9^n} + \frac{8^n}{9^n} < 1$, або $\left(\frac{7}{9}\right)^n + \left(\frac{8}{9}\right)^n < 1$.

Розглянемо функцію $f(n) = \left(\frac{7}{9}\right)^n + \left(\frac{8}{9}\right)^n$. Для довільного n

$$\left(\frac{7}{9}\right)^n > \left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}, \quad \left(\frac{8}{9}\right)^n > \left(\frac{8}{9}\right)^{n+1} \Rightarrow \left(\frac{7}{9}\right)^n + \left(\frac{8}{9}\right)^n > \left(\frac{7}{9}\right)^{n+1} + \left(\frac{8}{9}\right)^{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(n) > f(n+1), \quad \forall n \in N$$

Тому $f(n) = \left(\frac{7}{9}\right)^n + \left(\frac{8}{9}\right)^n$ є спадна. Легко підрахувати, що

$$f(1) = \left(\frac{7}{9}\right) + \left(\frac{8}{9}\right) > 1, \; f(2) = \left(\frac{49}{81}\right) + \left(\frac{64}{81}\right) > 1,$$

$$f(3) = \left(\frac{343}{729}\right) + \left(\frac{512}{729}\right) > 1, \; f(4) = \left(\frac{2401}{6561}\right) + \left(\frac{4096}{6561}\right) < 1$$

Тому розв'язок нерівності $n \in N \setminus \{1,2,3\}$.

2. *На дошці записані 5 чисел. Склавши їх попарно, отримали такі 10 сум: 18, 19, 20, 21, 22, 23, 2008, 2010, 2011, 2012. Які числа були записані на дошці? Запишіть ці числа за зростанням. У відповідь записати такі числа: четверте, третє, сума першого, другого та п'ятого.*

Розв'язання. Нехай були записані числа $a \le b \le c \le d \le e$. Тоді $a+b, a+c$ найменші суми ($a+b=18, a+c=19$), а $c+e, d+e$ найбільші ($c+e=2011, d+e=2012$). Якщо додати всі відповідні пари *18, 19, 20, 21, 22, 23, 2008, 2010, 2011, 2012* отримаємо $4(a+b+c+d+e)=8164$. Отже, $(a+b+c+d+e)=2041$. Тоді $(a+b+c+d+e)-(a+b)-(d+e)=2041-18-2012=11=c$. $a=19-c=8$, $b=18-a=10$, $(d+e)-(c+e)=d-c=1$, $d=c+1=12$, e = 2000. ***Відповідь: 12,11,2018***

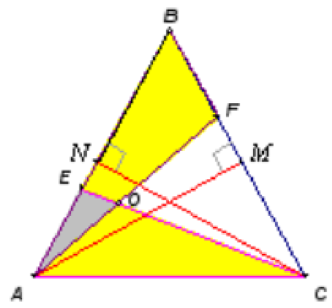
3. *Про натуральне число* n *відомо: число більше 2000; якщо від нього відняти два і до отриманого числа дописати справа будь-яку ненульову цифру* c, *то одержане нове число буде ділитись націло на* c. *Знайдіть найменше значення, яке може приймати число* n.

Розв'язання. Помітимо, що якщо до числа m дописати справа цифру c, то ми отримаємо число $10m+c$. Для того, щоб це число ділилось на c, необхідно й достатньо, щоб $10m$ ділилося на c. Тобто, для того, щоб виконувалась умова необхідно, щоб $10m$ ділилося на всі натуральні число від 1 до 9. Для будь-якого натурального m число $10m$ буде ділитися на 1, 2 та 5. Для подільності на інші цифри, треба щоб число m ділилося на 4, 7 та 9. Але тоді воно повинно ділитись на $4 \cdot 7 \cdot 9 = 252$, тому менше ніж 252 число m бути не може. Нескладно переконатися, що число $252*8 = 2016$ задовольняє умові «більше 2000», а тому шуканим числом є $n = m + 2 = 2018$. ***Відповідь*:** $n = 2018$.

4. *На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC взято точки E та F відповідно. Відрізки EC та FA перетинаються в точці O. Доведіть, що якщо площа чотирикутника BEOF дорівнює площі трикутника ACO, то AE = BF.*

Розв'язання. З рівності площ в умові завдання слідує, що трикутники ABF і ACE рівновеликі, так як їх площі отримуються додаванням площі трикутника EOA до рівних площ.

Так як трикутник ABC - рівнобедрений, то його висоти AM і CN рівні, при цьому AM та CN є також висотами трикутників ABF та CAE відповідно. Отже, будуть рівні і відповідні цим висотам основи, тобто BF = AE, що і було потрібно.



5. За означенням $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, n факторіал – це число, що дорівнює добутку всіх натуральних чисел від 1 до n. Наприклад $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Який множник a_k $(a_k = k!)$ потрібно викреслити в добутку $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{19} \cdot a_{20}$ для того, щоб отримане після викреслювання число стало квадратом деякого натурального числа?

***Розв'язання*.** Помітимо, що $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 19! \cdot 20! = (1! \cdot 2!) \cdot (3! \cdot 4!) \cdot \ldots \cdot (19! \cdot 20!) =$

$$= (1! \cdot 1! \cdot 2) \cdot (3! \cdot 3! \cdot 4) \cdot \ldots \cdot (19! \cdot 19! \cdot 20) =$$

$$= (1!)^2 \cdot 2 \cdot (3!)^2 \cdot 4 \cdot (5!)^2 \cdot 6 \cdot (7!)^2 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (19!)^2 \cdot 20 =$$

$$= (1!)^2 \cdot (3!)^2 \cdot (5!)^2 \cdot (7!)^2 \cdot \ldots \cdot (19!)^2 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20) =$$

$$= (1!)^2 \cdot (3!)^2 \cdot (5!)^2 \cdot (7!)^2 \cdot \ldots \cdot (19!)^2 \cdot 2^{10} \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10) =$$

$$= \left(2^5 \cdot 1! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 19!\right)^2 \cdot 10!$$

Таким чином, якщовикреслити 10!, то залишається число, що є квадрат.

На виконання роботи відводиться 4 години
Кожне завдання оцінюється в 7 балів
Використання калькуляторів не дозволяється