Департамент освіти й науки Запорізької облдержадміністрації
Запорізький обласний інститут післядипломної педагогічної освіти
ІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2018-2019 н.р.

8 клас

1. *На дошці записані 5 чисел. Склавши їх попарно, отримали такі 10 сум: 18, 19, 20, 21, 22, 23, 2008, 2010, 2011, 2012. Які числа були записані на дошці? Запишіть ці числа за зростанням. У відповідь записати такі числа: четверте, третє, сума першого, другого та п'ятого.*

. ***Розв'язання***. Нехай були записані числа $a \le b \le c \le d \le e$. $a+b \le a+c \le b+c \le c+d \le c+e \le d+e$ Тоді $a+b, a+c, b+c$ найменші суми ($a+b=18, a+c=19$), а $c+e, d+e$ найбільші ($c+e=2011, d+e=2012$). Якщо додати всі числа 18, 19, 20, 21, 22, 23, 2008, 2010, 2011, 2012 отримаємо 8164 та відповідні їм пари отримаємо $4(a+b+c+d+e)=8164$ Отже, $(a+b+c+d+e)=2041$. Тоді $(a+b+c+d+e)-(a+b)-(d+e)=2041-18-2012=11=c$. $a=19-c=8$, $b=18-a=10$, $(d+e)-(c+e)=d-c=1$, $d=c+1=12$, e = 2000.

Відповідь: 12,11,2018

2. *Квадратний тричлен $p(x)=ax^2+bx+c$, де a, b, c – цілі числа, c – непарне число, має цілі корені. Чи може бути парним числом: а) p(2018) б) p(2019)? Відповідь обґрунтуйте.*

Розв'язання.

1 спосіб. Нехай x_1 і x_2 – корені $p(x)$. За теоремою Вієта $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, то есть $b=-a(x_1+x_2)$, $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$, $c=a \cdot x_1 \cdot x_2$. За умовою *c* – непарне число. Числа x_1, x_2, *a* – цілі. Тому, числа x_1, x_2, *a* – непарні. Відповідно сума коренів та *b* – парні числа. Тоді $p(2018)=a \cdot 2018^2+b \cdot 2018+c$ є сума двох парних і непарного чисел. Тому *p(2018)* є непарне число.

Тоді $p(2019)=a \cdot 2019^2+b \cdot 2019+c$ є сума двох непарних і парного чисел. Тому *p(2019)* є парне число. Наприклад $p(x)=x^2-4x+5$. $p(2019)=2019^2-4 \cdot 2019+5=4068290$.

2 спосіб. $p(2018)=a \cdot 2018^2+b \cdot 2018+c$ є сума двох парних і непарного чисел. Тому *p(2018)* є непарне число.

Нехай x_1 корінь $p(x)$. $p(x_1)=ax_1^2+bx_1+c\equiv 0$ $c=-x_1(ax_1+b)$. *с- непарне, тому обидва множники непарні. Тому a, b, різної парності. Зауважимо, що парність* $2019(a2019+b)$ *та* $c=-x_1(ax_1+b)$ *однакова. Тому* $p(2019)=(a \cdot 2019+b) \cdot 2019+c$ є сума двох непарних. Тому *p(2019)* є парне число. Наприклад $p(x)=x^2-4x+5$. $p(2019)=2019^2-4 \cdot 2019+5=4068290$.

3. *Зобразіть на координатній площині множину всіх точок, координати (x;y) яких задовольняють рівнянню* $x^2-y^4=\sqrt{18x-x^2-81}$.

4. *Суму трьох квадратів $4^2+6^2+10^2$ можна представити як суму шести квадратів $1^2+2^2+3^2+5^2+7^2+8^2$. Доведіть, що $4034^2+4036^2+4038^2$ також можна представити як суму шести квадратів.*

Розв'язання. Ответ: $(a+b)^2+(a-b)^2+(a+c)^2+(a-c)^2+$
$+(b+c)^2+(b-c)^2=4a^2+4b^2+4c^2=(4035)^2+(4036)^2+(4037)^2+4+1+1$;.

5. *У рівнобедреному трикутнику* NPQ *з основою* NQ *із вершини* N *проведено промінь, що перетинає сторону* PQ *в точці* K, $\angle PNK = 24^o$. *Із вершини* P *до* NP *проведено перпендикуляр* $PM,\ M \in NK$, *при цьому* $NM = 2PK$. *Знайдіть кути трикутника* NPQ.

***Розв'язання.*.** Нехай A – середина NM. Оскільки $\angle NPM = 90^o$, $NM = 2PK$, тоді $PK = NA = AM = AP$. Отже $\angle NPA = \angle PNA = 24^o$, $\angle PKA = \angle PAK = 48^o$. Звідси послідовно знаходимо $\angle APK = 84^o$, $\angle NPQ = 108^o$, $\angle NQP = \angle QNP = 36^o$.

УВАГА!!! 8 КЛАС !!! КОРЕКЦІЯ В УМОВІ !!!

У задачі 5 замість «*Із вершини* P *до* NK *проведено перпендикуляр з основою М,*» читати «*Із вершини* P *до* NP *проведено перпендикуляр* $PM,\ M \in NK$,»

На виконання роботи відводиться 4 години

Кожне завдання оцінюється в 7 балів

Використання калькуляторів не дозволяється

РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ОЦІНЮВАННЯ 8 КЛАСУ.

Задача 2(додано ще один варіант розв'язання). Завдання оцінюється на повний бал незалежно від того, чи використовувалась теорема Вієта.

Враховуючи те, що більшість учнів не вивчала на даний момент тему «арифметичний квадратний корінь» доцільним буде при розподілі місць керуватись балами за 1,2,4,5 задачі. У разі розв'язання учнем задачі №3 бали за задачу додавати учневі до загальної суми за 1,2,4,5 задачі .