

**Департамент освіти й науки Запорізької облдержадміністрації
Запорізький обласний інститут післядипломної педагогічної освіти
II етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2018-2019 н.р.**

7 клас

1. Мама купила коробку кускового цукру (цукор у кубиках). Діти спочатку з'їли верхній шар - 77 кубиків, потім один бічний шар - 55 кубиків, нарешті, передній шар. Скільки кубиків цукру залишилося в коробці?

Розв'язання. У коробки є три вимірювання: висота, ширина й глибина. Щоб довідатися, скільки кубиків у верхньому шарі, потрібно ширину помножити на глибину, у бічному - висоту на глибину. Після того, як був з'їдений верхній шар, висота зменшилась на 1, а глибина залишилася незмінною. Тому 77 і 55 повинні ділитися на глибину вихідної коробки. 77 і 55 мають спільні множники 1 і 11. Якщо глибина дорівнює 1, то після того, як з'їли передній шар нічого не залишилося.

Якщо вважати, що цукор все-таки залишився, то глибина коробки 11. Тоді ширина $77:11=7$ кубиків, а висота після того, як верхній шар з'їдений, $55:11=5$ кубиків. Після того, як буде з'їдений бічний шар, ширина зменшиться на 1 (і стане рівна $7-1=6$ кубиків), а після того, як з'їдять передній шар, глибина зменшиться на 1 і стане $11-1=10$.

Тому висота цукру, що залишився 5, ширина - 6, глибина - 10 кубиків. $5*6*10=300$ кубиків

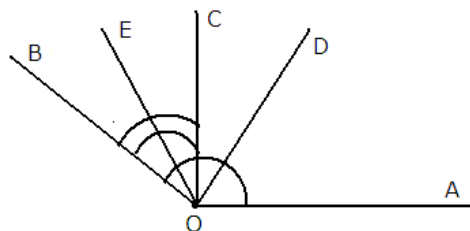
Відповідь. 300 або 0.

2. На дошці записані 5 чисел. Склавши їх попарно, отримали такі 10 сум: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Які числа були записані на дошці?

Розв'язання. Нехай були записані числа $a \leq b \leq c \leq d \leq e$.
 $a+b \leq a+c \leq b+c \leq c+d \leq c+e \leq d+e$ Тоді $a+b, a+c$ найменші суми ($a+b=0, a+c=2$),
а $c+e, d+e$ найбільші ($c+e=13, d+e=15$). □ Якщо додати всі числа 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15 отримаємо 72 та відповідні їм пари отримаємо $4(a+b+c+d+e)=72$ Отже,
 $(a+b+c+d+e)=18$. Тоді $(a+b+c+d+e)-(a+b)-(d+e)=18-0-15=3=c$. Тоді
отримаємо $c=3, a=-1, b=1, d=5, e=10$.

Відповідь. -1, 1, 3, 5, 10

3. У середині тупого кута AOB провели три промені OC, OD і OE , причому OC перпендикулярний до OA , OD - бісектриса кута AOB і OE - бісектриса кута BOC . Знайдіть величину кута DOE .



Розв'язання. Нескладно переконатися, що промені розташовані в такому порядку: OA, OD, OC, OE, OB . Якщо $\angle AOB = 2\alpha$, то $\angle BOC = 2\alpha - 90^\circ$, $\angle BOD = \alpha$, $\angle BOE = \alpha - 45^\circ$, а тому $\angle DOE = \angle BOD - \angle BOE = 45^\circ$.

Відповідь: 45° .

4. Знайти всі натуральні числа x , що задовольняють рівнянню:
 $x \cdot 874 = \otimes \otimes \otimes 92$. Праворуч стоїть п'ятицифрове число.

Розв'язання:

$$x \cdot 874 = 100p + 92, 10092 \leq x \cdot 874 \leq 99992, 12 \leq x \leq 114, 100 \leq p \leq 999$$

Щоб число $x \cdot 874$ закінчувалося на 2, число x повинне закінчуватися на 3 або на 8, тобто $x = 10n + 3$ або $x = 10m + 8$. Тоді

$$.8740n + 2622 = 100p + 92, \quad 8740m + 6992 = 100p + 92.$$

$$8740n + 2530 = 100p, \quad 8740m + 6900 = 100p.$$

$$874n + 253 = 10p, \quad 874m + 690 = 10p.$$

Перше рівняння коренів не має, тому що зліва число непарне, а праворуч – парне.

$$437m + 345 = 5p \Rightarrow 437m = 5(p - 69).$$

З другого рівняння видно, що m ділиться на 5, тобто $m = 5k$, тоді

$p = 437k + 69$. Враховуючи обмеження на p , отримуємо $k = 1$ або $k = 2$. Тоді $m = 5$ або, $m = 10$, а $x = 58$ або $x = 108$

Відповідь: 58 або 108.

5. Іринка та Данилко довільними способами (довільні порядок та орієнтація) викладали на столі кісточки доміно у вигляді прямокутника 8×7 (рис.1). Іринка запропонувала Данилкові таку гру: накреслити таблицю 8×7 і у кожну клітинку записати число, що дорівнює кількості крапок на відповідній частині кісточки доміно (рис.2); потім один відвертається, а другий витирає лінії в таблиці (рис.3).

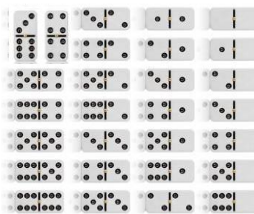


Рис.1

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 4 | 4 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 4 | 5 | 2 | 3 | 1 | 2 | 0 |
| 6 | 4 | 6 | 2 | 4 | 1 | 3 | 0 |
| 5 | 5 | 3 | 3 | 5 | 1 | 4 | 0 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 6 | 1 | 5 | 0 |
| 6 | 6 | 5 | 3 | 2 | 2 | 6 | 0 |

Рис.2

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 6 | 4 | 4 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 4 | 5 | 2 | 3 | 1 | 2 | 0 |
| 6 | 4 | 6 | 2 | 4 | 1 | 3 | 0 |
| 5 | 5 | 3 | 3 | 5 | 1 | 4 | 0 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 6 | 1 | 5 | 0 |
| 6 | 6 | 5 | 3 | 2 | 2 | 6 | 0 |

Рис.3

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0 | 1 | 0 | 3 | 1 | 2 | 5 |
| 4 | 4 | 5 | 2 | 4 | 6 | 2 | 3 |
| 2 | 5 | 6 | 0 | 1 | 3 | 0 | 2 |
| 5 | 1 | 2 | 0 | 4 | 0 | 4 | 3 |
| 5 | 4 | 5 | 1 | 6 | 3 | 2 | 3 |
| 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 5 | 6 | 6 |
| 6 | 1 | 3 | 6 | 4 | 6 | 3 | 4 |

Рис.4

Якщо той, хто відвертався вкаже правильне розташування кісточок, то він виграє і отримає цукерку, а якщо ні, то виграє той, хто загадав. Першим відвертався Данилко. Коли він повернувся то побачив таблицю, що зображена на рис.4. Чи зможе він вказати правильне розташування та отримати приз? Допоможіть йому і вкажіть це розташування. Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання. Використаємо звичайні властивості кісточок доміно: у наборі доміно обов'язково зустрічається кісточка з парою будь-яких чисел від 0 до 6, причому жодна така пари не повторюється двічі.

Місця всіх дублів у цій розкладці визначаються однозначно. Відзначимо їх. Звідси однозначно визначається місце розташування кісточок 5-0, 5-3, 0-2, 3-4, 0-6, 2-5. Відзначимо тепер, що якщо де небудь є перераховані пари цифр і знаходяться поруч, то вони не можуть утворювати кісточки.

| | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| 5 0 1 0 3 1 2 5 | 5 0 1 0 3 1 2 5 | 5 0 1 0 3 1 2 5 |
| 4 4 5 2 4 6 2 3 | 4 4 5 2 4 6 2 3 | 4 4 5 2 4 6 2 3 |
| 2 5 6 0 1 3 0 2 | 2 5 6 0 1 3 0 2 | 2 5 6 0 1 3 0 2 |
| 5 1 2 0 4 0 4 3 | 5 1 2 0 4 0 4 3 | 5 1 2 0 4 0 4 3 |
| 5 4 5 1 6 3 2 3 | 5 4 5 1 6 3 2 3 | 5 4 5 1 6 3 2 3 |
| 0 1 0 2 1 5 6 6 | 0 1 0 2 1 5 6 6 | 0 1 0 2 1 5 6 6 |
| 6 1 3 6 4 6 3 4 | 6 1 3 6 4 6 3 4 | 6 1 3 6 4 6 3 4 |

| | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| 5 0 1 0 3 1 2 5 | 5 0 1 0 3 1 2 5 | 5 0 1 0 3 1 2 5 |
| 4 4 5 2 4 6 2 3 | 4 4 5 2 4 6 2 3 | 4 4 5 2 4 6 2 3 |
| 2 5 6 0 1 3 0 2 | 2 5 6 0 1 3 0 2 | 2 5 6 0 1 3 0 2 |
| 5 1 2 0 4 0 4 3 | 5 1 2 0 4 0 4 3 | 5 1 2 0 4 0 4 3 |
| 5 4 5 1 6 3 2 3 | 5 4 5 1 6 3 2 3 | 5 4 5 1 6 3 2 3 |
| 0 1 0 2 1 5 6 6 | 0 1 0 2 1 5 6 6 | 0 1 0 2 1 5 6 6 |
| 6 1 3 6 4 6 3 4 | 6 1 3 6 4 6 3 4 | 6 1 3 6 4 6 3 4 |

| | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| 5 0 1 0 3 1 2 5 | 5 0 1 0 3 1 2 5 | 5 0 1 0 3 1 2 5 |
| 4 4 5 2 4 6 2 3 | 4 4 5 2 4 6 2 3 | 4 4 5 2 4 6 2 3 |
| 2 5 6 0 1 3 0 2 | 2 5 6 0 1 3 0 2 | 2 5 6 0 1 3 0 2 |
| 5 1 2 0 4 0 4 3 | 5 1 2 0 4 0 4 3 | 5 1 2 0 4 0 4 3 |
| 5 4 5 1 6 3 2 3 | 5 4 5 1 6 3 2 3 | 5 4 5 1 6 3 2 3 |
| 0 1 0 2 1 5 6 6 | 0 1 0 2 1 5 6 6 | 0 1 0 2 1 5 6 6 |
| 6 1 3 6 4 6 3 4 | 6 1 3 6 4 6 3 4 | 6 1 3 6 4 6 3 4 |

Звідси однозначно визначається місце розташування кісточок 2-4 й 0-3. Відзначивши, що ці кісточки не можуть перебувати на інших місцях, одержимо розташування кісточок

І знову аналізується те, що, якщо де небудь перераховані пари цифр знаходяться поруч, вони не можуть утворювати кісточки. Звідси вже можна однозначно відновити всю розкладку.

| |
|-----------------|
| 5 0 1 0 3 1 2 5 |
| 4 4 5 2 4 6 2 3 |
| 2 5 6 0 1 3 0 2 |
| 5 1 2 0 4 0 4 3 |
| 5 4 5 1 6 3 2 3 |
| 0 1 0 2 1 5 6 6 |
| 6 1 3 6 4 6 3 4 |

На виконання роботи відводиться 4 години
Кожне завдання оцінюється в 7 балів
Використання калькуляторів не дозволяється