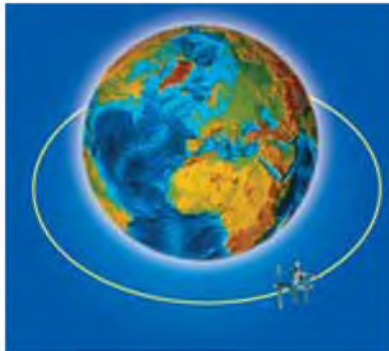


Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова

# ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 7 класу  
загальноосвітніх навчальних закладів



Київ  
2015

УДК 000  
ББК 22.151я72  
Б36

**Г. П. Бевз**  
Б36 Геометрія: Підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. /  
Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К. : Видавництво  
«Відродження», 2015. — 192 с.  
ISBN 0.

**УДК 0**  
**ББК 0**

ISBN 000

© Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова, 2015  
© Видавництво «Відродження», 2015

## Юні друзі!

Запрошуємо вас у світ Геометрії. Цей світ дивний: щедрий, досконалий, тісно пов'язаний зі світами Праці, Розуму, Мистецтва.

Геометрія виникла як наука про вимірювання землі. Грецьке слово *гео* означає «земля», а *метрео* — «міряю». Єгипетські й грецькі землеміри ще 3000 років тому вимірювали відстані, кути, визначали площі земельних ділянок. Застосовували знання з геометрії будівельники, мореплавці, астрономи, військові, митці.

Геометрія потрібна інженерам, архітекторам, конструкторам, художникам, креслярам, столярам, слюсарям, токарям, кравцям та багатьом іншим фахівцям.

Вивчати *систематичний курс геометрії*, розвивати логічне мислення і просторову уяву допоможе вам цей підручник.

У кожному параграфі підручника є теорія й задачі. Читаючи теорію, основну увагу звертайте на слова, надруковані *курсивом* і **жирним шрифтом**. *Курсивом* виділено геометричні терміни, назви понять. Потрібно вміти пояснювати їх зміст, наводити відповідні приклади. **Жирним шрифтом** надруковано важливі геометричні твердження. Їх треба розуміти, вміти доводити і застосовувати для розв'язування задач. Закінчення доведення теореми позначено значком ▲.

У кожному параграфі підручника виокремлено рубрику «Для допитливих». Вона містить додатковий навчальний і пізнавальний матеріал та допоможе вам зацікавитися геометрією.

Щоб перевірити, як ви зрозуміли і запам'ятали новий теоретичний матеріал, спробуйте відповісти на запитання і виконати завдання рубрики «Запитання і завдання для самоконтролю», яка є в кожному параграфі і повторюється після розділів.

Щоб опанувати курс геометрії, треба навчитися розв'язувати задачі. У деяких задачах виділено жирним шрифтом важливі твердження, їх корисно запам'ятати. З різними способами розв'язування задач знайомить рубрика «Виконаємо разом». Радимо розглянути задачі цієї рубрики, перш ніж виконувати домашнє завдання. Номери завдань, рекомендовані для домашньої роботи, виділено кольором.

Добре підготуватися до тематичного оцінювання ви зможете, розв'язуючи завдання рубрик «Самостійна робота», «Тестові завдання» і «Типові задачі для контрольної роботи».

Наприкінці підручника вміщено рубрики «Задачі підвищеної складності» та «Завдання для позакласної роботи». Їх пропонуємо тим учням, які люблять математику.

У величезному саду Геометрії кожний може підібрати собі букет за смаком. Беріть і ви — що кому подобається.

Усім бажаємо успіхів!

Автори

**Точка — це перша основа геометрії.**  
*Леонардо да Вінчі*

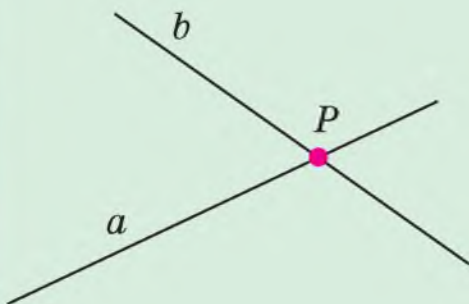




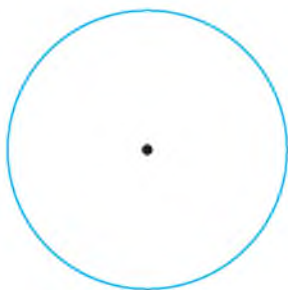
## НАЙПРОСТІШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

У цьому розділі ви повторите і поглибите свої знання про найпростіші і найважливіші геометричні фігури: **точки, прямі, відрізки, кути.**

Дізнаєтесь, як вимірюють відрізки і кути, ознайомитесь із найуживанішими креслярськими і вимірювальними інструментами.



## § 1. ТОЧКИ І ПРЯМІ



Мал. 1

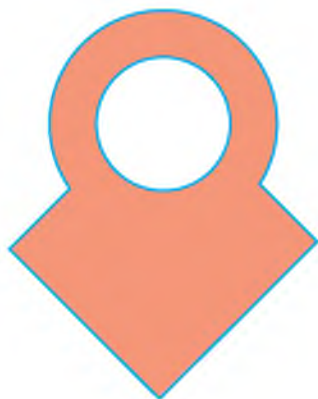
*Геометрія* — це наука про геометричні фігури та їх властивості. Найпростіша геометрична фігура — *точка*. Кожна інша геометрична фігура складається з точок. Наприклад, *коло* — це фігура, що складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки (мал. 1). *Відрізок* також складається з точок. Будь-яка множина точок є геометричною фігурою. Частина геометричної фігури чи об'єднання кількох фігур — теж геометрична фігура (мал. 2).

Однією з геометричних фігур є *площина*. Уявлення про частину площини дає поверхня стола, стелі, підлоги. У геометрії площина вважається необмеженою, ідеально рівною і гладкою.

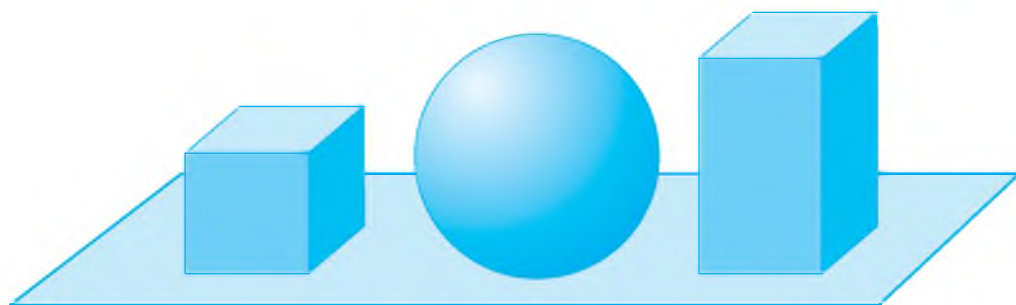
Фігури, які можна розмістити в одній площині, називають *плоскими*. Усі названі вище геометричні фігури — плоскі. А от куб, куля, прямокутний паралелепіпед — *неплоскі фігури* (мал. 3). Частина геометрії, у якій вивчають плоскі фігури, називають *планіметрією* (від латинського слова «планум» — площина).

Ми починаємо вивчати планіметрію.

Насамперед розглянемо, як можуть бути розташовані на площині точки і прямі.



Мал. 2



Мал. 3

Ви вже знаєте, як за допомогою лінійки проводять прямі (мал. 4).

*Пряма* в геометрії — ідеально рівна і нескінченна в обидва боки. Як і кожна інша фігура, пряма складається з точок. Якщо точка  $A$  лежить на прямій  $a$ , говорять, що пряма  $a$  проходить через точку  $A$ . Символічно за-

писують це так:  $A \in a$ . Якщо точка  $B$  не лежить на прямій  $a$ , пишуть:  $B \notin a$  (мал. 5).



Мал. 4

**Якщо не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що їй не належать.**

Через одну точку можна провести безліч прямих. На малюнку 6 зображено прямі  $a$  і  $b$ , які проходять через точку  $P$ . Це їх спільна точка. Інших спільних точок прямих  $a$  і  $b$  не мають.

Якщо дві прямі мають тільки одну спільну точку, кажуть, що вони *перетинаються в цій точці*. Прямі  $a$  і  $b$  перетинаються в точці  $P$ .

Якщо прямій належать точки  $A$  і  $B$ , кажуть, що ця пряма *проходить через точки  $A$  і  $B$* . Позначають її так:  $AB$ .



Мал. 5

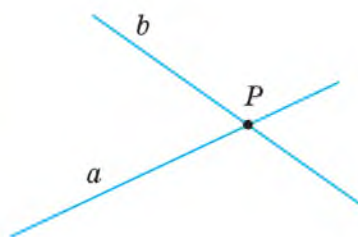
**Через будь-які дві різні точки можна провести пряму, і тільки одну.**

Чи можна провести пряму через три точки? Не завжди. Якщо точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  розміщені, як показано на малюнку 7, через них можна провести пряму.

А через точки  $A$ ,  $B$  і  $D$  — не можна.

Кажуть, що *точки  $A$ ,  $B$  і  $D$  не лежать на одній прямій*.


*Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  лежать на одній прямій, причому точка  $B$  лежить між точками  $A$  і  $C$ .*



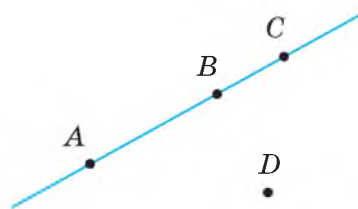
Мал. 6

**Із трьох точок прямої одна, і тільки одна, лежить між двома іншими.**

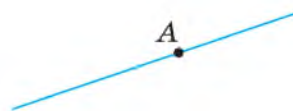
Якщо точка  $B$  лежить між точками  $A$  і  $C$ , кажуть, що точки  $A$  і  $C$  лежать по різні боки від точки  $B$ , а точки  $A$  і  $B$  — по один бік від точки  $C$ .

Надруковані вище жирним шрифтом три речення, позначені знаком , — це *основні властивості розміщення точок на прямій*.

Будь-яка точка  $A$  прямої ділить цю пряму на дві частини (мал. 8). Кожну із частин прямої разом із точкою  $A$  називають *променем*, який виходить із точки  $A$ . Точку  $A$  називають

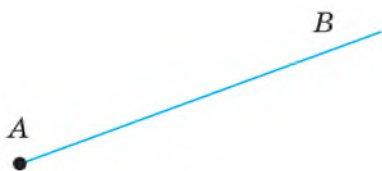


Мал. 7

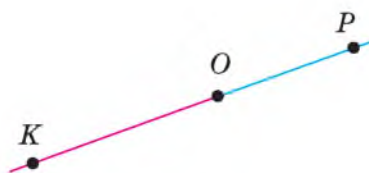


Мал. 8

початком променя. Якщо кажуть «промінь  $AB$ », то мають на увазі промінь з початком у точці  $A$  (мал. 9).



Мал. 9



Мал. 10

Два промені, які мають спільний початок і доповнюють один одного до прямої, називають *доповняльними*. На малюнку 10 зображено промінь  $OK$  — доповняльний для променя  $OP$ , і промінь  $OP$  — доповняльний для  $OK$ .

## Для допитливих

Геометрія — частина математики (мал. 11).

Геометрична наука багата за змістом і методами дослідження. До неї входять: елементарна геометрія, вища геометрія, неевклідові геометрії та ін. У школі вивчають тільки *елементарну геометрію*.

Геометрія тісно пов'язана з багатьма іншими науками, насамперед із фізикою. Проте фізика займається вивченням матеріальних тіл (які мають масу, температуру, колір тощо), а в геометрії абстрагуються від усього матеріального.

*Абстрагуватися* — означає подумки відриватися від конкретних об'єктів, які нас оточують.

Абстрагуючись від матеріальних речей, ми уявно створюємо *ідеальні об'єкти* зі схожими властивостями. Кінець голки, натягнута струна — це матеріальні об'єкти. Вони мають певну товщину, довжину, масу. Абстрагуючись від таких фізичних властивостей, людська уява створила абстрактні геометричні поняття: *точка, пряма*.

У природі абстрактної прямої немає, але це поняття існує в людській уяві. І дуже корисне поняття, бо всі властивості прямої і її частин, виявлені в геометрії, переносяться на мільйони і мільярди всіх натягнутих струн, прямолінійних рейок, труб, стрічок тощо.

Не існує в природі і геометрична *площина* — без товщини, ідеально рівна і гладка, нескінченна в кожному її напрямі. Але для науки це ідеальне поняття дуже важливе, бо властивості, встановлені в геометрії для площини і її частин, можна переносити на властивості мільярдів конкретних шибок, стін та інших предметів, які мають плоскі поверхні.



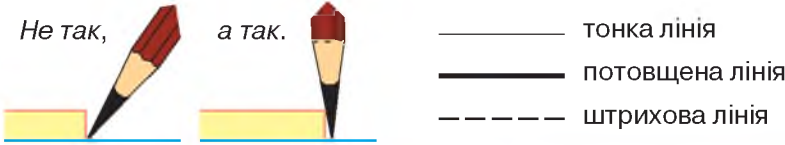
Мал. 11



### Кресліть красиво

Проводячи відрізок, вістрям олівця не слід торкатися нижнього ребра лінійки, а треба трохи відступити від нього.

Геометричний відрізок не має товщини. Але щоб зробити малюнок зрозумілішим і красивішим, креслярі іноді зображують його потовщеною лінією, іноді — штриховою лінією або й іншим кольором:



### Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що таке геометрія? Що таке планіметрія?
2. Наведіть приклади плоских і неплоских фігур.
3. Що означають записи:  $A \in a$ ,  $B \notin b$ ?
4. Опишіть поняття: *точка, пряма, площина*.
5. Наведіть приклади матеріальних об'єктів, моделями яких є точка, пряма, площина.
6. Сформулюйте основні властивості розміщення точок на прямій.
7. Що означає вислів «точка  $B$  лежить між точками  $A$  і  $C$ »?
8. Що таке промінь? Як позначають промені?
9. Які промені називають доповняльними?

### Виконаємо разом

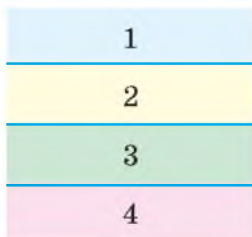
На скільки частин можуть розбивати площину три її прямі?

✎ Якщо прямі розташовані, як показано на малюнку 12, то вони розбивають площину на 7 частин. Якщо вони розташовані, як показано на малюнку 13 (а, б), то вони розбивають площину на 4 або 6 частин.

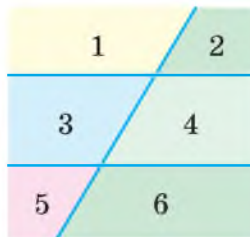
Отже, три прямі розбивають площину, якій вони належать, на 4, 6 або 7 частин. ▲



Мал. 12



Мал. 13, а



Мал. 13, б

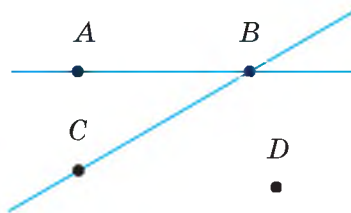


Мал. 13, в

## ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

## Виконайте усно

1. Чи через кожні дві точки можна провести пряму? Чи існують дві точки, через які можна провести пряму?
2. Чи через кожні три точки можна провести пряму? Чи існують три точки, через які можна провести пряму?
3. Провідміняйте слово: а) *точка*; б) *пряма*; в) *площина*.
4. Опишіть, як взаємно розташовані точки і прямі на малюнку 14.
5. На скільки частин пряму ділить її точка? А дві точки?
6. Чи можна вважати доповняльними промені  $PK$  і  $KP$  (див. мал. 10)? А промені  $OP$  і  $KP$ ? Чому?



Мал. 14

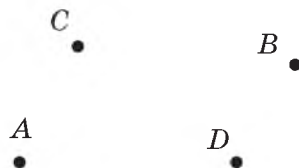
## А

7. Позначте в зошиті точки  $A$  і  $B$  та проведіть через них пряму. Назвіть цю пряму.
8. Проведіть пряму. Позначте кілька точок, що належать цій прямій, і кілька точок, що їй не належать.
9. Дано точку  $A$ . Проведіть через неї три прямі. Чи можна через точку  $A$  провести десять прямих? А мільйон прямих?
10. Пряма  $a$  і точки  $A, B$  такі, що  $A \in a$  і  $B \notin a$ . Зобразіть це на малюнку.
11. Прямі  $k$  і  $p$  перетинаються в точці  $X$ . Зобразіть це на малюнку. Чи правильно, що  $X \in k$  і  $X \in p$ ?
12. Пряма  $AB$  перетинає пряму  $AC$  в точці  $A$ , а пряму  $BC$  — у точці  $B$ . Чи належить точка  $C$  прямій  $AB$ ?
13. Позначте точки  $K, P$  і  $T$  так, щоб через них можна було провести пряму. Як можна назвати цю пряму?
14. Позначте на прямій точки  $A, B, C$  так, щоб точки  $A$  і  $B$  лежали по один бік від точки  $C$ , а точки  $A$  і  $C$  — по один бік від точки  $B$ .
15. Дано пряму  $a$ . Позначте точки  $A, B$  і  $C$  так, щоб прямі  $AB$  і  $a$  перетинались у точці  $C$ , яка лежить між точками  $A$  і  $B$ .
16. Прямі  $a$  і  $b$  перетинаються в точці  $P$ . Скільки променів утворилось?
17. На скільки частин площину ділить її пряма? А дві прямі? Зобразіть усі випадки.

## Б

18. Позначте точки  $A, B, C$  і  $D$  так, щоб прямі  $AB$  і  $CD$  перетинались, а промені  $AB$  і  $CD$  не перетинались.

19. Чи можна розмістити точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$  так, щоб промені  $AB$  і  $CD$  перетинались, а промені  $AC$  і  $BD$  не перетинались?
20. Накресліть три прямі  $AB$ ,  $BC$  і  $AC$ . На скільки частин розбивають ці прямі площину?
- 21\*. Позначте чотири точки так, щоб жодні три з них не лежали на одній прямій (мал. 15). Скільки існує прямих, що проходять через будь-які дві з цих точок? На скільки частин розбивають ці прямі площину?
22. Учень провів спочатку одну пряму, а потім, перевернувши лінійку, — іншу й одержав лінії, що перетинаються у двох точках (мал. 16). Що можна сказати про його лінійку? Чому?
23. Щоб перевірити лінійку, дивляться вповдовж її ребра (мал. 17). Що бачать, якщо лінійка викривлена?



Мал. 15



Мал. 16



Мал. 17

### Практичне завдання

24. Покажіть, як, перегнувши аркуш паперу, можна одержати «лінійку» для проведення прямих.

### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

25. Назвіть і зобразіть геометричні фігури, які ви розглядали в попередніх класах.
26. Накресліть відрізок завдовжки 4 см і відрізок, удвічі довший.
27. Накресліть кути: гострий, прямий, тупий, розгорнутий. Зафарбуйте їх внутрішні області.
28. Знайдіть периметр трикутника, сторони якого дорівнюють 5 см, 7 см і 8,5 см.
29. Знайдіть периметр квадрата, якщо він більший за довжину однієї сторони на 6 см.
30. Перемалюйте в зошит частину давньогрецького орнаменту (мал. 18). Зробіть стрічку з ним удвічі довшою.



Мал. 18

## § 2. ВІДРІЗКИ І ЇХ ДОВЖИНИ

Дві точки прямої розділяють цю пряму на три частини: два промені і відрізок.

*Відрізком*  $AB$  називають частину прямої, яка складається з точок  $A$  і  $B$  та всіх точок, що лежать між ними.

Точки  $A$  і  $B$  називають *кінцями відрізка*  $AB$ . Усі інші точки цього відрізка — його *внутрішні точки*.

На малюнку 19 зображено відрізок  $AB$ . Точки  $A$  і  $B$  — його кінці, а будь-яка точка, що лежить між точками  $A$  і  $B$ , — внутрішня точка відрізка  $AB$ .

Два відрізки *перетинаються*, якщо вони мають тільки одну спільну внутрішню точку.

Щоб виміряти відрізки, треба мати *одиничний відрізок* (одиницю виміру). Відрізок, зображений на малюнку 20, вважатимемо одиничним. Його довжина дорівнює 1 см.

Якщо на відрізку  $AB$  одиничний відрізок відкладається рівно 3 рази, то це означає, що довжина відрізка  $AB$  дорівнює 3 см (мал. 21).

Якщо на відрізку  $EP$  одиничний відрізок відкладається два рази з остачею, а в остачі десята частина одиничного відрізка відкладається 7 разів, то довжина відрізка  $EP$  дорівнює 2,7 см. Пишуть:  $AB = 3$  см,  $EP = 2,7$  см.

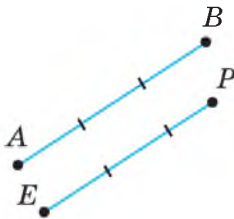
За одиничний відрізок можна брати відрізок завдовжки 1 м, 1 км, 1 фут, 1 дюйм тощо.



Мал. 19



Мал. 20



Мал. 21

### Кожний відрізок має певну довжину.

Два відрізки називають *рівними*, якщо рівні їх довжини.

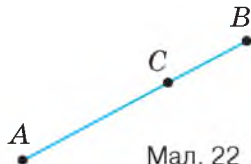
Із двох відрізків *більшим* вважають той, довжина якого більша.

У сантиметрах вимірюють порівняно невеликі відрізки. Більші відрізки вимірюють у дециметрах, метрах, кілометрах; менші — у міліметрах. Нагадаємо, що

$$1 \text{ км} = 1000 \text{ м}, 1 \text{ м} = 10 \text{ дм} = 100 \text{ см} = 1000 \text{ мм}.$$


Довжину відрізка називають також *відстанню* між його кінцями. Якщо  $XU = 18$  см, то це означає, що *відстань між точками*  $X$  і  $U$  дорівнює 18 см. Відстань між  $X$  і  $U$  завжди дорівнює відстані між  $U$  і  $X$ .

Якщо точка  $C$  відрізка  $AB$  розбиває його на дві частини, довжини яких дорівнюють, наприклад, 2 см і 1,2 см, то довжина відрізка  $AB$  дорівнює 3,2 см (мал. 22).



Мал. 22

Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які його розбиває будь-яка його внутрішня точка.

Надруковані вище жирним шрифтом два речення, позначені знаком , — це *основні властивості вимірювання відрізків*.

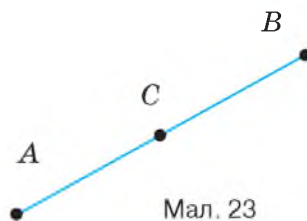
*Серединою відрізка* називають його внутрішню точку, яка розбиває цей відрізок на дві рівні частини.

Якщо точка  $C$  — середина відрізка  $AB$ , то  $AC = CB$  (мал. 23).

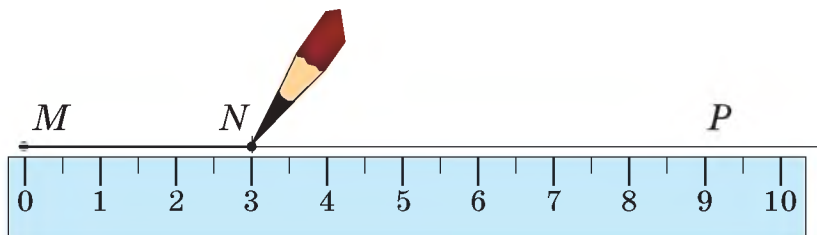
Якщо точка  $C$  не належить відрізку  $AB$ , то сума довжин відрізків  $AC$  і  $CB$  більша від  $AB$ .

Отже, для будь-яких трьох точок  $A$ ,  $B$  і  $C$  завжди  $AB + BC \geq AC$ .

Вимірювати довжини відрізків доводиться багатьом фахівцям. Креслярі вимірюють відрізки масштабними лінійками, столяри — складними метрами, кравці — клейончастими сантиметрами, будівельники — рулетками (мал. 24).



На малюнку 25 зображено відкладання відрізка  $MN$  завдовжки 3 см на промені  $MP$  за допомогою лінійки.



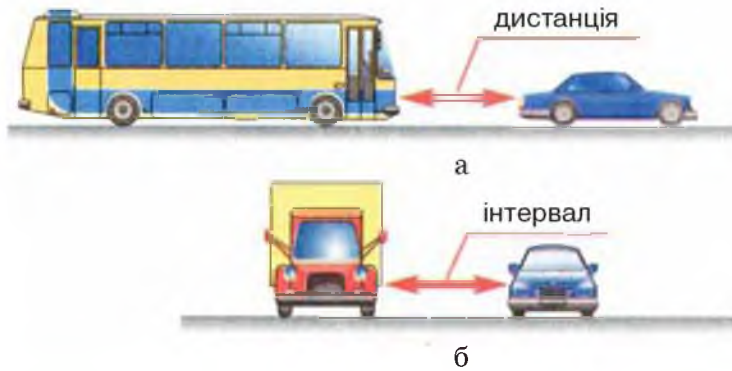
**Основна властивість відкладання відрізків.**

На будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок даної довжини, і тільки один.



**Для допитливих**

На практиці для різних відстаней існують різні назви: довжина, ширина, висота, глибина, дистанція, інтервал (мал. 26).



Мал. 26

**Запитання і завдання для самоконтролю**

1. Що таке відрізок? Що таке кінці відрізка?
2. Що таке відстань між двома точками?
3. Що означає вислів «два відрізки перетинаються»?
4. Сформулюйте основні властивості вимірювання відрізків.
5. Які відрізки називають рівними?
6. Що таке середина відрізка?
7. Яка нерівність виконується для будь-яких трьох точок?

**Виконаємо разом**

1. Промінь — частина прямої. Чи правильно говорити, що промінь коротший за пряму?

✔ Пряма і промінь не мають довжин, тому порівнювати їх довжини немає сенсу.

Отже, говорити, що промінь коротший за пряму, — неправильно. ▲

2. Точки  $K$ ,  $P$  і  $T$  лежать на одній прямій. Знайдіть відстань між точками  $P$  і  $T$ , якщо  $KP = 1,7$  м,  $KT = 4,8$  м. Скільки розв'язків має задача?

✔ Позначимо точки  $K$  і  $T$  такі, що  $KT = 4,8$  м. Точка  $P$  прямої  $KT$  віддалена від точки  $K$  на  $1,7$  м. Можливі два випадки (мал. 27):

а) точка  $K$  лежить між точками  $P$  і  $T$ :  $PT = 1,7$  м +  $4,8$  м =  $6,5$  м;

б) точка  $P$  лежить між точками  $K$  і  $T$ :  $PT = 4,8$  м -  $1,7$  м =  $3,1$  м.

Отже, задача має два розв'язки:  $6,5$  м;  $3,1$  м. ▲



Мал. 27

## ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

## Виконайте усно

31. Знайдіть довжину відрізка  $AB$ , якщо точка  $C$  — його середина і  $CB = 5$  дм.
32. Знайдіть довжину відрізка, який довший за свою половину на 35 см.
33. Точка  $C$  ділить відрізок  $AB$  у відношенні 1 : 2. Знайдіть:
  - 1)  $CB$ , якщо  $AC$  дорівнює: 1 см; 3 дм; 10 км;
  - 2)  $AB$ , якщо  $AC$  дорівнює: 2 см; 5 дм; 30 м;
  - 3)  $AB$ , якщо  $CB$  дорівнює: 2 см; 6 м; 12 км.
34. Знайдіть довжину відрізка, якщо точки  $K$  і  $P$  ділять його на три рівні частини і  $KP = 7$  см.
35. Точки  $A$  і  $B$  лежать по різні боки від прямої  $a$ . Чи перетинає відрізок  $AB$  пряму  $a$ ?
36. Точки  $K$  і  $P$  лежать по один бік від прямої  $c$ . Чи перетинає відрізок  $KP$  пряму  $c$ ? А пряма  $c$  перетинає пряму  $KP$ ?
37. Точка  $A$  лежить між точками  $B$  і  $C$ . Чи є точка  $B$  внутрішньою точкою відрізка  $AC$ ?

## А

38. Позначте на прямій точки  $A$  і  $B$ . Який відрізок утворився? Зобразіть його середину.
39. Позначте точки  $A, B, C, D$  так, щоб ніякі три з них не лежали на одній прямій. Побудуйте відрізки  $AB, AC, AD, BC, BD, CD$ .
40. Позначте на прямій точки  $A, B, C, D$  так, щоб відрізки  $AC$  і  $BD$  не мали спільних точок і щоб точки  $C$  і  $B$  лежали між точками  $A$  і  $D$ . Знайдіть спільну частину відрізків  $AB$  і  $CD$ .
41. Прямі  $AB$  і  $CD$  перетинаються,  $C$  — внутрішня точка відрізка  $AB$ . Чи перетинаються відрізки  $AB$  і  $CD$ ?
42. Відрізок  $AB$  перетинає пряму  $a$ , а відрізок  $BC$  не перетинає її, причому  $C \notin a$ . Чи перетинає пряму  $a$  відрізок  $AC$ ?
43. Накресліть відрізки  $AB, AC, AD, CB, CD, BD$  такі, щоб точка  $C$  лежала між точками  $A$  і  $B$ , а точка  $B$  — між  $C$  і  $D$ . Скільки спільних точок мають відрізки  $AC$  і  $BD, AC$  і  $CB, AB$  і  $CD$ ?
44. Точка  $X$  лежить між точками  $A$  і  $B$ . Знайдіть довжину відрізка  $AB$ , якщо:
  - а)  $AX = 2,5$  см,  $XB = 3,4$  см;
  - б)  $AX = 5,3$  м,  $XB = 4,2$  м;
  - в)  $AX = 2\frac{1}{3}$  дм,  $XB = 6\frac{2}{3}$  дм.

45. Точка  $M$  лежить між точками  $K$  і  $P$ . Знайдіть відстань між точками  $M$  і  $P$ , якщо:
- $KP = 0,9$  дм,  $KM = 0,3$  дм;
  - $KP = 2,6$  дм,  $KM = 1,4$  дм;
  - $KP = 2\frac{5}{6}$  дм,  $KM = \frac{1}{6}$  дм.
46. Точка  $C$  лежить між точками  $A$  і  $B$ .  $AC = 5$  см, відстань  $BC$  — на 3 см більша. Знайдіть  $AB$ .
47. Чи лежать точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  на одній прямій, якщо:
- $AB = 2,5$  см,  $BC = 3,8$  см,  $AC = 1,3$  см;
  - $AB = 1,9$  дм,  $BC = 2,9$  дм,  $AC = 4,9$  дм?
48. Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $K$  лежать на одній прямій.  $AB = BC = CK$ . Знайдіть  $CK$ , якщо  $AC = 12$  см.
49. Чи можна розмістити точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  так, щоб виконувались рівності:
- $AB = 2,3$  см,  $BC = 3,5$  см,  $AC = 6,3$  см;
  - $AB = 5,1$  см,  $BC = 3,5$  см,  $AC = 6,8$  см;
  - $AB = 3,1$  см,  $BC = 7,2$  см,  $AC = 10,3$  см?

## Б

50. Чи може відрізок  $BC$  лежати на промені  $AB$ , якщо:
- $AB = 9,2$  см,  $BC = 3,8$  см,  $AC = 13$  см;
  - $AB = 9,2$  см,  $BC = 3,8$  см,  $AC = 5,4$  см;
  - $AB = 9,2$  см,  $BC = 13,8$  см,  $AC = 4,6$  см?
51. На відрізку  $XU$  завдовжки 4,8 дм лежить точка  $C$ . Знайдіть відстані  $XC$  і  $CY$ , якщо:
- $XC - CY = 1,3$  дм;
  - $CY = 2XC$ ;
  - $XC : CY = 1 : 5$ .
52. Точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  лежать на одній прямій,  $AB = 10$  дм,  $BC = 3$  дм. Знайдіть  $AC$ . Розгляньте всі можливі випадки.
53. Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  лежать на одній прямій,  $B$  — середина  $AC$ ,  $BC = 7$  м,  $CD = 10$  м. Знайдіть  $AD$ .
54. Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  лежать на одній прямій. Знайдіть  $CD$ , якщо  $AB = 10$  см,  $AC = 3$  см,  $BD = 4$  см. Розгляньте всі можливі випадки.
55. Поясніть, як провішують прямі за допомогою віх (мал. 28).



Мал. 28

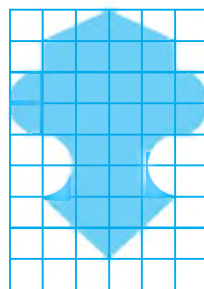
56. Дано відрізок  $AB$ . Побудуйте відрізок  $KP$ :
- утричі довший за  $AB$ ;
  - удвічі коротший від  $AB$ ;
  - якщо  $KP = 2,5 AB$ .
57. Як за допомогою півметрової лінійки побудувати двометровий відрізок?

### Практичне завдання

58. Виміряйте довжину і ширину своєї парти.

### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

59. Перемалюйте в зошит фігуру, зображену на малюнку 29. Знайдіть її площу, прийнявши площу однієї клітинки за  $0,25 \text{ см}^2$ .
60. Накресліть коло радіуса 4 см. Поділіть його на 4 рівні дуги і знайдіть довжину однієї з них.
61. На скільки частин можуть поділити площину два кола, розташовані на ній?
62. Знайдіть довжину ребра куба, якщо сума довжин усіх його ребер дорівнює 6 м.



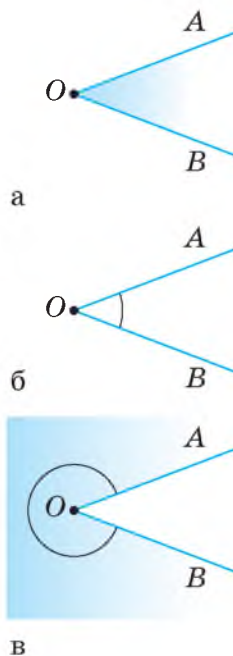
Мал. 29

## § 3. КУТИ І ЇХ МІРИ

Два промені, що мають спільний початок, розбивають площину на дві частини.

Частину площини, обмежену двома променями із спільним початком, називають *кутом*.

Промені, що обмежують кут, називають *сторонами кута*, а їх спільний початок — *вершиною кута* (мал. 30, а). Такий кут називають кутом  $AOB$  або кутом  $BOA$ , або кутом  $O$  і записують відповідно:  $\angle AOB$  або  $\angle BOA$ , або  $\angle O$ . Усі точки кута, які не належать його сторонам, утворюють *внутрішню область* цього кута. Внутрішню область кута на малюнку 30, а зафарбовано. Іноді внутрішню область кута позначають дугою, іноді — ніяк не позначають, а тільки уявляють. На малюнках 30, б і 30, в зображено кути з вершиною  $O$  і сторонами  $OA$  і  $OB$ .



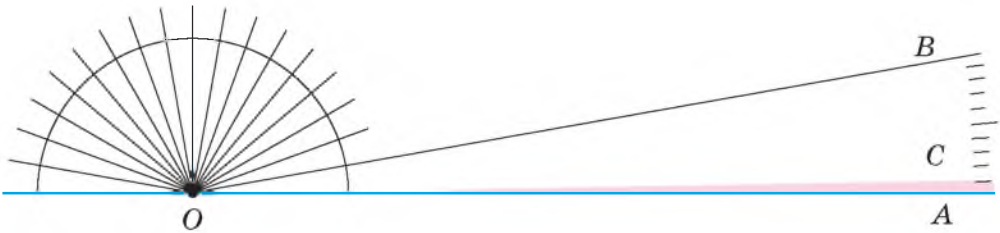
Мал. 30

Кут, сторони якого — доповняльні промені, називають *розгорнутим кутом* (мал. 31).



Мал. 31

Щоб вимірювати кути, треба мати одиницю виміру. За таку одиницю приймають кут в 1 *градус* (скорочено:  $1^\circ$ ). У розгорнутому куті він уміщується 180 разів. Уявімо півколо, поділене на 18 рівних дуг (мал. 32). Коли з його центра  $O$  через усі точки поділу і кінці півкола провести промені, вони поділять розгорнутий кут на 18 кутів по  $10^\circ$ . Один із таких кутів ( $\angle AOB$ ) ділимо на 10. Міра кута  $AOC$  дорівнює  $1^\circ$ .



Мал. 32

### Кожний кут має певну міру.

Міра розгорнутого кута дорівнює  $180^\circ$ .

Міру кута позначають так само, як і кут. Наприклад, якщо міра кута  $ABC$  дорівнює 60 градусів, пишуть:  $\angle ABC = 60^\circ$ . Дуже малі кути вимірюють у хвилинах і секундах.

*Мінutoю* називають  $\frac{1}{60}$  частину градуса, а *секундою* —  $\frac{1}{60}$  частину мінути.

Записують:  $1^\circ = 60'$ ,  $1' = 60''$ .

Кути в зошиті та на класній дошці вимірюють *транспортом* (мал. 33), а на місцевості — *астролябією* (мал. 34, а), *теодолітом* (мал. 34, б) чи іншими кутомірними приладами.



Мал. 33



Мал. 34, а



Мал. 34, б

Два кути називають *рівними*, якщо їх міри рівні. Із двох кутів більшим вважають той, міра якого більша.



Кут називають *прямим*, якщо його міра дорівнює  $90^\circ$ , *гострим* — якщо він менший від прямого, *тупим* — якщо він більший за прямий, але менший від розгорнутого (мал. 35).

Прямі кути на малюнках частіше позначають не дугами, а квадратами (див. мал. 35).

Кути, більші від розгорнутого (див. мал. 30, в), поки що не розглядаватимемо.



прямий кут



гострий кут




тупий кут

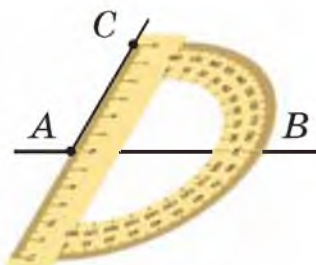
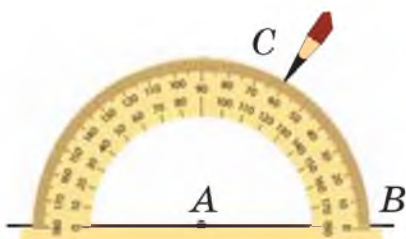
Мал. 35

Промінь, який виходить з вершини кута і лежить у його внутрішній області, називають *внутрішнім променем кута*. Внутрішній промінь розбиває даний кут на два менші кути. Наприклад, внутрішній промінь  $OK$  кута  $AOB$  розбиває цей кут на кути  $AOK$  і  $KOB$  (мал. 37). При цьому  $\angle AOK + \angle KOB = \angle AOB$ . Говорять, що кут  $AOB$  дорівнює сумі кутів  $AOK$  і  $KOB$ .

**Міра кута дорівнює сумі мір кутів, на які даний кут розбивається його внутрішнім променем.**

Два виділені вище речення, позначені знаком , називають *основними властивостями вимірювання кутів*.

За допомогою транспортира можна не тільки вимірювати кути, а й відкладати кути заданої міри від будь-якого променя. Поступовий процес відкладання кута  $CAB$ , що дорівнює  $40^\circ$ , від променя  $AB$  показано на малюнку 36.

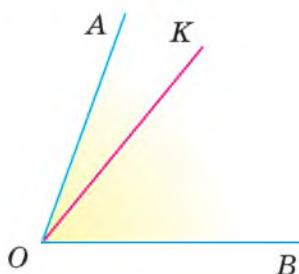


Мал. 36

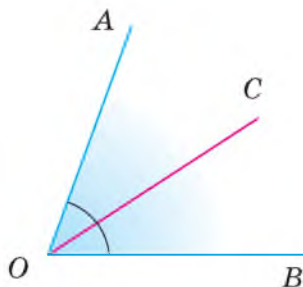
**Основна властивість відкладання кутів**

**Від будь-якого променя з одного боку від нього можна відкласти кут заданої міри, і тільки один.**

Внутрішній промінь, який розбиває кут на два рівні кути, називають *бісектрисою* цього кута. На малюнку 38 промінь  $OC$  — бісектриса кута  $AOB$ .



Мал. 37



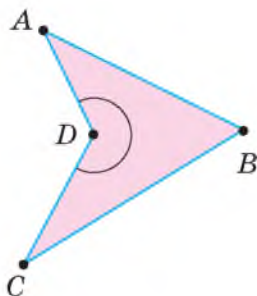
Мал. 38

## Для допитливих

**Д** *Кутом* часто називають також фігуру, складену з двох променів, що мають спільний початок. Таким чином, кутом називають і деяку лінію. Але поділити такий кут на два чи більше рівних кутів не можна. То ж коли говорять про додавання, віднімання чи ділення кутів, то кут розглядають разом з його внутрішньою областю.

Хоча далі ми розглядатимемо здебільшого кути менші від розгорнутого, слід пам'ятати, що кути бувають і більші за розгорнутий. Вони мають більше  $180^\circ$ . Таким, наприклад, є кут  $D$  чотирикутника  $ABCD$  (мал. 39). Існують і спеціальні транспортири, якими вимірюють кути, більші за розгорнутий (мал. 40). Зазвичай у геометрії розглядають кути не більші за  $360^\circ$ . Поняття кута застосовують часто також для характеристики поворотів. Наприклад, велосипедне колесо можна повернути на  $100^\circ$ , можна на  $300^\circ$ . А коли колесо зробило півтора оберти? Уважають, що воно повернулося на  $360^\circ$  і ще на  $180^\circ$ , а разом — на  $540^\circ$ .

Крім градусів, минут і секунд, є й інші міри кутів. Моряки вимірюють кути у *румбах*. Румбом називають восьму частину прямого кута.  $1 \text{ румб} = 11,25^\circ$  (мал. 41). Науковці найчастіше вимірюють кути в *радіанах*. Що це таке, дізнаєтесь у старших класах.



Мал. 39



Мал. 40



Мал. 41

### Запитання і завдання для самоконтролю

1. Яку фігуру називають кутом? Як позначають кути?
2. Який кут називають:
  - а) гострим; б) тупим; в) прямим; г) розгорнутим?
3. Якими приладами і в яких одиницях вимірюють кути?
4. Що таке внутрішня область кута і внутрішній промінь кута?
5. Що таке бісектриса кута?
6. Які кути називають рівними?
7. Сформулюйте основні властивості вимірювання кутів.

### Виконаємо разом

1. Знайдіть міру кута  $AOB$ , якщо промені  $OC$  і  $OK$  ділять його на три рівні кути і  $\angle COK = 40^\circ$ .

▼ Кут  $COK$  — третя частина кута  $AOB$ .

Тому  $\angle AOB = 40^\circ \cdot 3 = 120^\circ$ .

Отже,  $\angle AOB = 120^\circ$ . ▲

▼ 2. Знайдіть міри кутів, утворених стрілками годинника: о 3-й годині; о 5-й годині (мал. 42).

На циферблаті годинника півколо відповідає 6 годинам. Тому одній годині відповідає  $1/6$  частина розгорнутого кута, тобто  $30^\circ$ . Коли на годиннику 3-тя година, кут між годинною і хвилинною стрілками дорівнює  $30^\circ \cdot 3 = 90^\circ$ . Коли на годиннику 5-та година, кут між його стрілками дорівнює  $30^\circ \cdot 5 = 150^\circ$ .

Отже, ці кути —  $90^\circ$  і  $150^\circ$ . ▲



Мал. 42

### ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

#### Виконайте усно

63. Скільки мінут мають  $2^\circ$ ? А півтора градуса?

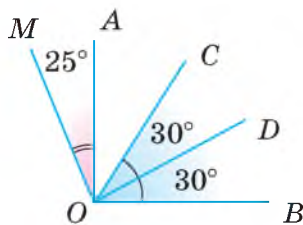
64. 1) Назвіть усі кути, що є на малюнку 43. Які з них гострі, прямі, тупі?

2) Нехай  $\angle MOA = 25^\circ$ ,  $\angle COD = \angle DOB = 30^\circ$ ,  $\angle AOB$  — прямий. Знайдіть  $\angle MOB$  і  $\angle AOC$ .

3) Порівняйте кути  $MOC$  і  $AOD$ ,  $AOD$  і  $COB$ .

65. Знайдіть кут між променями, які ділять прямий кут на 3 рівні частини.

66. Промені, проведені з центра кола, ділять його на 4 рівні частини. Знайдіть кут між двома сусідніми променями.



Мал. 43

## А

67. Накресліть гострий кут. Позначте буквами його вершину і сторони. Заштрихуйте його внутрішню область.
68. Накресліть тупий кут. Позначте його сторони буквами, а внутрішню область — дугою.
69. Накресліть розгорнутий кут  $KPT$ . Назвіть його вершину і сторони. Позначте внутрішню область кута дугою.
70. Позначте три точки  $A$ ,  $B$  і  $C$ , що не лежать на одній прямій. Побудуйте кут  $ABC$ . Чи може цей кут бути розгорнутим?
71. Користуючись транспортиром, побудуйте кути, міри яких дорівнюють  $50^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ . Проведіть бісектриси побудованих кутів.
72. Побудуйте на око кути, міри яких дорівнюють  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ , і проведіть їх бісектриси. Перевірте точність побудови транспортиром.
73. Виразіть у градусах і мінутах міри кутів:  $135'$ ;  $5000'$ .
74. Виразіть у мінутах:  $6^\circ 15'$ ;  $2^\circ$ ;  $11,5^\circ$ .
75. Виконайте дії: а)  $5^\circ 48' + 7^\circ 35'$ ; б)  $32^\circ 17' - 8^\circ 45'$ .
76. Виконайте дії: а)  $33^\circ 33' + 15^\circ 15'$ ; б)  $145^\circ 54' - 41^\circ 41'$ .  
в)  $123^\circ 45' + 54^\circ 32'$ ; г)  $44^\circ 14' - 14^\circ 44'$ .
77. Заповніть таблицю, у якій  $A$  — міра даного кута,  $B$  — міра кута між його стороною і бісектрисою.

$A$	$10^\circ$		$60^\circ$		$100^\circ$	$180^\circ$
$B$		$50^\circ$		$45^\circ$		

78. Знайдіть міру кута  $AOB$ , якщо  $OC$  — його внутрішній промінь і  $\angle AOC = 60^\circ$ ,  $\angle COB = 30^\circ$ .
79. Чи є промінь  $PM$  внутрішнім променем кута  $KPT$ , якщо  $\angle KPT = 70^\circ$ ,  $\angle KPM = 80^\circ$ ? А якщо  $\angle KPM = 20^\circ$ ?

## Б

80. На який кут повертається хвилинна стрілка годинника протягом 20 хв; 30 хв?
81. На який кут повертається годинна стрілка годинника протягом 0,5 год; п'яти хвилин?
82. Знайдіть кут  $MOB$ , якщо  $\angle AOM = 25^\circ$  і  $\angle AOM : \angle MOB = 4 : 5$ .
83. Знайдіть кут  $AOB$ , якщо  $\angle AOM = 30^\circ$ ,  $\angle MOB = 60^\circ$  і всі ці кути розташовані в одній площині.
84. Дано кути  $AOB$  і  $MOB$  однієї площини, що містять відповідно  $120^\circ$  і  $60^\circ$ . Знайдіть міру кута  $AOM$ . Розгляньте два випадки.
85. Накресліть кут  $AOB$  і його внутрішні промені  $OK$  і  $OM$  так, щоб  $\angle AOB = 90^\circ$ ,  $\angle AOK = 40^\circ$ ,  $\angle MOB = 30^\circ$ . Знайдіть  $\angle KOM$ .

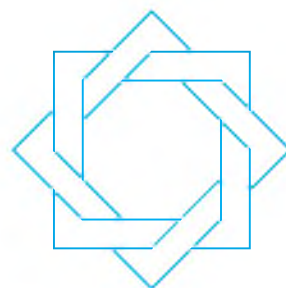
86.  $OM$  — бісектриса кута  $AOB$ ,  $OK$  — бісектриса кута  $AOM$ . У скільки разів  $\angle KOM$  менший від  $\angle AOB$ ?
87.  $OM$  — бісектриса прямого кута  $AOB$ .  $OK$  і  $OP$  — бісектриси кутів  $AOM$  і  $MOB$ . Знайдіть міру кута  $KOP$ .
88.  $\angle AOM = 30^\circ$ , а  $\angle BOM$  — на  $20^\circ$  більший. Знайдіть  $\angle AOB$ . Розгляньте всі можливі випадки.
89.  $OM$  і  $OK$  — внутрішні промені кута  $AOB$ ,  $OK$  — бісектриса кута  $MOB$ ,  $\angle AOB = 150^\circ$ ,  $\angle KOB$  — на  $40^\circ$  менший від  $\angle MOB$ . Знайдіть  $\angle AOM$  і  $\angle MOK$ .

### Практичне завдання

90. а) Виріжте з паперу гострий, прямий і тупий кути. Виміряйте їх транспортиром.  
 б) Перегинаючи аркуші паперу, зробіть моделі кутів, міри яких дорівнюють  $180^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ .

### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

91. Площа квадрата дорівнює  $16 \text{ см}^2$ . Знайдіть його периметр.
92. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його площа дорівнює  $40 \text{ см}^2$ , а одна із сторін —  $5 \text{ см}$ .
93. Чи на одній прямій розташовані точки  $A$ ,  $B$  і  $C$ , якщо:  
 а)  $AB = 5 \text{ дм}$ ,  $BC = 7 \text{ дм}$ ,  $AC = 10 \text{ дм}$ ;  
 б)  $AB = 35 \text{ см}$ ,  $BC = 45 \text{ см}$ ,  $AC = 1 \text{ дм}$ ;  
 в)  $AB = \frac{3}{4}$  дюйма,  $BC = \frac{2}{3}$  дюйма,  
 $AC = \frac{1}{12}$  дюйма?
94. Як знайти площу прямокутного трикутника, сторони якого дорівнюють  $3 \text{ см}$ ,  $4 \text{ см}$  і  $5 \text{ см}$ ?
95. Перемалюйте в зошит фігуру, зображену на малюнку 44. Розфарбуйте її двома кольорами.



Мал. 44



### Геометрія навколо нас





## ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

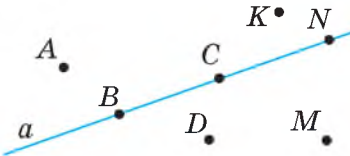
А

Б

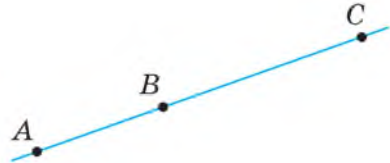
1

Які з точок:

- а) належать прямій  $a$ ;  
б) не належать прямій  $a$ ?

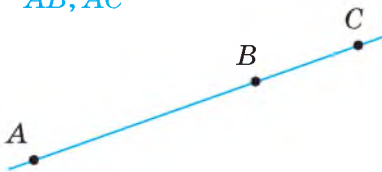


$$\frac{AC = 10, AB : BC = 2 : 3.}{AB, BC}$$

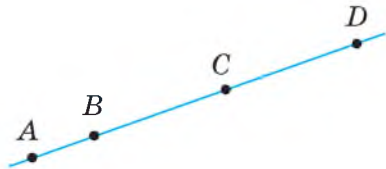


2

$$\frac{AB = \frac{2}{3} AC, BC = 5.}{AB, AC}$$



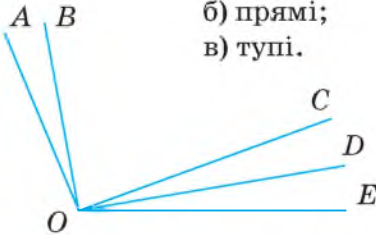
$$\frac{AD = 20, BC = CD = 2AB.}{AB, BC, CD, BD}$$



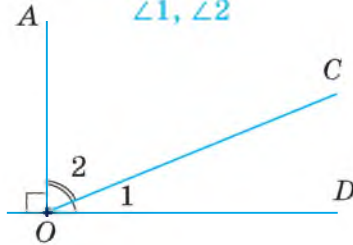
3

Запишіть кути:

- а) гострі;  
б) прямі;  
в) тупі.

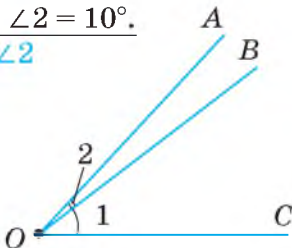


$$\frac{\angle 2 = 2 \angle 1.}{\angle 1, \angle 2}$$

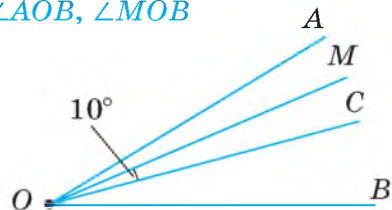


4

$$\frac{\angle AOC = 50^\circ;}{\angle 1 - \angle 2 = 10^\circ.}{\angle 1, \angle 2}$$



$$\frac{OC \text{ — бісектриса } \angle AOB,}{\angle AOM = \angle MOC,}{\angle AOB, \angle MOB}$$



**ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ**

**А**

**Б**

**1**

$$\frac{PK = 12 \text{ см.}}{AB}$$



$$\begin{aligned} AB &= 15 \text{ см,} \\ AD &= 9 \text{ см,} \\ BC &= 12 \text{ см.} \end{aligned}$$

$$\underline{\text{Довести: } CD = BD}$$



**2**

$$\begin{aligned} MP : PN &= 2 : 5, \\ PN - MP &= 12 \text{ см.} \end{aligned}$$

$$\underline{MN}$$



$$\begin{aligned} K, M, N, P &\text{ — середини відрізків;} \\ AB, BC, CD, DE; \\ AE &= 20 \text{ см; } MN = 4 \text{ см.} \end{aligned}$$

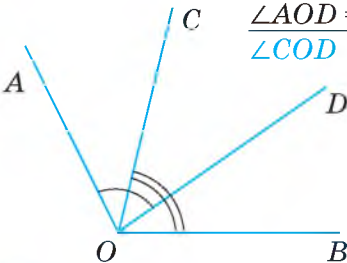
$$\underline{KP}$$



**3**

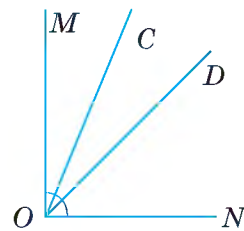
$$\begin{aligned} \angle AOB &= 130^\circ, \\ \angle COB &= 85^\circ, \\ \angle AOD &= 80^\circ. \end{aligned}$$

$$\underline{\angle COD}$$



$$\begin{aligned} \angle MON &= 90^\circ, \\ OD &\text{ — бісектриса } \angle MON, \\ OC &\text{ — бісектриса } \angle MOD. \end{aligned}$$

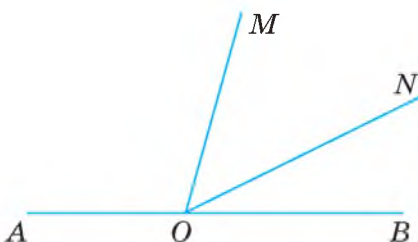
$$\underline{\angle CON}$$



**4**

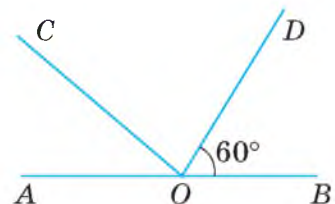
$$\begin{aligned} \angle MON : \angle MOB &= 5 : 8, \\ \angle AON &= 150^\circ. \end{aligned}$$

$$\underline{\angle AOM : \angle MON}$$



$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \angle AOC &= \frac{1}{3} \angle COD, \\ \angle BOD &= 60^\circ. \end{aligned}$$

$$\underline{\angle AOC; \angle COD}$$



**Самостійна робота 1****Варіант 1**

- 1°.  $C$  — внутрішня точка відрізка  $AB$ .  $AC = 6$  см, відрізок  $BC$  на 2 см менший від  $AC$ . Знайдіть довжину відрізка  $AB$ .
- 2°.  $\angle AOB = 130^\circ$ ,  $OC$  — його бісектриса. Знайдіть  $\angle BOC$ .
- 3°. Точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  лежать на одній прямій.  $AB = 9$  см,  $BC = 4$  см. Знайдіть довжину відрізка  $AC$ . Розгляньте два випадки.
- 4°. Промінь  $OC$  ділить  $\angle AOB$  на два кути так, що один із них у 3 рази більший за інший. Знайдіть  $\angle AOC$  і  $\angle BOC$ , якщо  $\angle AOB = 80^\circ$ .

**Варіант 2**

- 1°.  $C$  — внутрішня точка відрізка  $AB$ .  $BC = 4$  см, відрізок  $AC$  у 2 рази більший за  $BC$ . Знайдіть довжину відрізка  $AB$ .
- 2°.  $OC$  — бісектриса кута  $AOB$ ,  $\angle AOC = 50^\circ$ . Знайдіть  $\angle AOB$ .
- 3°. Точки  $M$ ,  $N$  і  $K$  лежать на одній прямій.  $MN = 6$  см,  $NK = 10$  см. Знайдіть довжину відрізка  $MK$ . Розгляньте два випадки.
- 4°. Промінь  $OC$  ділить  $\angle AOB$  на два кути так, що один із них на  $20^\circ$  більший за інший. Знайдіть  $\angle AOC$  і  $\angle BOC$ , якщо  $\angle AOB = 70^\circ$ .

**Варіант 3**

- 1°.  $C$  — внутрішня точка відрізка  $AB$ .  $AC = 4$  см, відрізок  $BC$  на 3 см більший за  $AC$ . Знайдіть довжину відрізка  $AB$ .
- 2°.  $\angle AOB = 60^\circ$ ,  $OC$  — його бісектриса. Знайдіть  $\angle AOC$ .
- 3°. Точки  $E$ ,  $F$  і  $P$  лежать на одній прямій.  $EF = 7$  см,  $FP = 3$  см. Знайдіть довжину відрізка  $EP$ . Розгляньте два випадки.
- 4°. Промінь  $OC$  ділить  $\angle AOB$  на два кути так, що  $\angle AOC : \angle BOC = 2 : 3$ . Знайдіть  $\angle AOC$  і  $\angle BOC$ , якщо  $\angle AOB = 100^\circ$ .

**Варіант 4**

- 1°.  $C$  — внутрішня точка відрізка  $AB$ .  $AC = 9$  см, відрізок  $BC$  у 3 рази менший від  $AC$ . Знайдіть довжину відрізка  $AB$ .
- 2°.  $OC$  — бісектриса кута  $AOB$ .  $\angle BOC = 40^\circ$ . Знайдіть  $\angle AOB$ .
- 3°. Точки  $K$ ,  $P$  і  $T$  лежать на одній прямій.  $KP = 12$  см,  $PT = 5$  см. Знайдіть довжину відрізка  $KT$ . Розгляньте два випадки.
- 4°. Промінь  $OC$  ділить  $\angle AOB$  на два кути так, що один із них на  $30^\circ$  менший від іншого. Знайдіть  $\angle AOC$  і  $\angle BOC$ , якщо  $\angle AOB = 120^\circ$ .

**Тестові завдання**

**1**

<p>1. Прямі <math>a</math> і <math>b</math> перетинаються в точці <math>O</math>. Якій прямій належить точка <math>O</math>?</p>	<p>а) <math>a</math>; б) <math>b</math>; в) <math>a</math> і <math>b</math>; г) не належить жодній.</p>
<p>2. На скільки частин ділять площину дві прямі, що перетинаються?</p>	<p>а) на 2; б) на 3; в) на 4; г) на 6.</p>
<p>3. Яка з трьох точок лежить між двома іншими, якщо <math>XU = 3</math>, <math>YZ = 7</math>, <math>XZ = 4</math>?</p>	<p>а) <math>X</math>, б) <math>Y</math>; в) <math>Z</math>; г) жодна.</p>
<p>4. <math>M</math> — середина відрізка <math>AB</math>, <math>AM = 7</math> см. Знайдіть довжину відрізка <math>AB</math>.</p>	<p>а) 14 см; б) 21 см; в) 3,5 см; г) 7 см.</p>
<p>5. <math>K</math> — внутрішня точка відрізка <math>AB</math>, <math>AK = 3</math> см, <math>AB = 10</math> см. Знайдіть довжину відрізка <math>KB</math>.</p>	<p>а) 13 см; б) 7 см; в) 30 см; г) 8 см.</p>
<p>6. Знайдіть міру кута, якщо його бісектриса утворює зі стороною кут <math>20^\circ</math>.</p>	<p>а) <math>20^\circ</math>; б) <math>10^\circ</math>; в) <math>30^\circ</math>; г) <math>40^\circ</math>.</p>
<p>7. <math>\angle AOB = 110^\circ</math>, <math>OM</math> — його внутрішній промінь, <math>\angle BOM = 60^\circ</math>. Знайдіть <math>\angle AOM</math>.</p>	<p>а) <math>50^\circ</math>; б) <math>170^\circ</math>; в) <math>90^\circ</math>; г) <math>70^\circ</math>.</p>
<p>8. <math>OM</math> — внутрішній промінь кута <math>AOB</math>, <math>\angle AOM = 40^\circ</math>, <math>\angle BOM</math> — на <math>10^\circ</math> більший. Знайдіть <math>\angle AOB</math>.</p>	<p>а) <math>70^\circ</math>; б) <math>50^\circ</math>; в) <math>90^\circ</math>; г) 44.</p>
<p>9. Точки <math>A</math>, <math>B</math> і <math>C</math> лежать на одній прямій. <math>AB = 5</math> см, <math>BC = 12</math> см. Знайдіть <math>AC</math>.</p>	<p>а) 17 см; б) 7 см; в) 17 см або 7 см; г) 18 см або 8 см.</p>
<p>10. <math>\angle AOB = 50^\circ</math>, <math>\angle BOC = 20^\circ</math>. Знайдіть <math>\angle AOC</math>.</p>	<p>а) <math>70^\circ</math>; б) <math>30^\circ</math> або <math>70^\circ</math>; в) <math>30^\circ</math>; г) <math>70^\circ</math> або <math>40^\circ</math>.</p>

## Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що таке геометрія?
2. Що таке планіметрія?
3. Наведіть приклади плоских і неплоских фігур.
4. Опишіть поняття *точка*.
5. Опишіть поняття *пряма*.
6. Опишіть поняття *площина*.
7. Наведіть приклади матеріальних об'єктів, моделями яких є точка, пряма, площина.
8. Що означають записи  $A \in a$ ,  $A \notin b$ ?
9. Що означає вислів «*точка B лежить між точками A і C*»?
10. Сформулюйте основні властивості розміщення точок на прямій.
11. Що таке промінь?
12. Як позначають промені?
13. Які промені називають доповняльними?
14. Що таке відрізок?
15. Що таке кінці відрізка?
16. У яких одиницях вимірюють відрізки?
17. Сформулюйте основні властивості вимірювання відрізків.
18. Що таке середина відрізка?
19. Яка нерівність виконується для будь-яких трьох точок?
20. Що таке відстань між двома точками?
21. Яку фігуру називають кутом?
22. Як позначають кути?
23. Який кут називають гострим?
24. Який кут називають тупим?
25. Який кут називають прямим?
26. Який кут називають розгорнутим?
27. У яких одиницях вимірюють кути?
28. Що таке внутрішня область кута?
29. Що таке внутрішній промінь кута?
30. Сформулюйте основні властивості вимірювання кутів.
31. Що таке бісектриса кута?
32. Які кути називають рівними?



## ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 1

*Геометрія* — наука про геометричні фігури і їх властивості. Найпростіша геометрична фігура — *точка*. Кожна інша геометрична фігура складається з точок, тобто є деякою множиною точок. Інші фігури — *пряма*, *площина*. Їх зміст розкривають не означеннями, а описуючи їх основні властивості.

Якщо точка  $A$  лежить на прямій  $a$ , говорять, що пряма  $a$  проходить через точку  $A$  і записують:  $A \in a$ . Якщо точка  $B$  не належить прямій  $a$ , пишуть:  $B \notin a$ .

Фігури, які можна розмістити в одній площині, називають *плоскими фігурами*. Частину геометрії, у якій досліджують фігури тільки однієї площини, називають *планіметрією*.

*Основні властивості розміщення точок на прямій*

- **Якби не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що їй не належать.**
- **Через будь-які дві різні точки можна провести пряму, і тільки одну.**
- **Із трьох точок прямої одна, і тільки одна, лежить між двома іншими.**

Частини прямої — *відрізок* і *промінь*. Відрізок  $AB$  — це частина прямої, що містить точки  $A$ ,  $B$  і всі точки, що лежать між ними. Кожному відрізку ставиться у відповідність його довжина. Довжина відрізка — відстань між його кінцями. Відстані і довжини вимірюють метрами, сантиметрами, міліметрами, кілометрами, футами, дюймами та іншими одиничними відрізками.

*Основні властивості вимірювання відрізків*

- **Кожний відрізок має певну довжину.**
- **Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які його розбиває будь-яка внутрішня точка.**

Частину площини, обмежену двома променями із спільним початком, називають *кутом*. Кути бувають гострі, прямі, тупі, розгорнуті і більші за розгорнуті. *Міри кутів* визначають у градусах, мінутах, секундах, румбах та деяких інших кутових одиницях виміру.

*Основні властивості вимірювання кутів*

- **Кожний кут має певну міру.**
- **Міра кута дорівнює сумі мір кутів, на які даний кут розбивається його внутрішнім променем.**

*Основні властивості відкладання відрізків і кутів*

- **На будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок даної довжини, і тільки один.**
- **Від будь-якого променя з одного боку від нього можна відкласти кут заданої міри, і тільки один.**

*Бісектриса кута* — внутрішній промінь, який розбиває даний кут на два рівні кути.

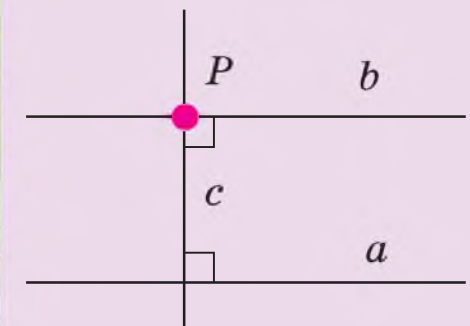


Геометрія Евкліда є лише першим кроком до вивчення форм реального простору.

*О. Смогоржевський*

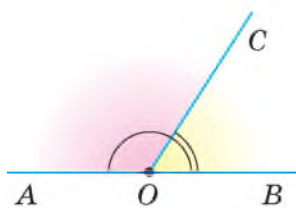
## ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

У цьому розділі підручника ви розширите і поглибите свої знання про прямі і промені однієї площини, ознайомитеся з дуже важливими поняттями: **суміжні кути**, **вертикальні кути**, **перпендикулярні прямі**, **паралельні прямі** тощо, а також із важливими загальногеометричними поняттями: **аксіома**, **теорема**, **наслідок**, **доведення**, **ознака**, **означення**.





## § 4. СУМІЖНІ І ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ



Мал. 45

Два кути, на які розбивається розгорнутий кут його внутрішнім променем, називають *суміжними*.

Одна сторона в суміжних кутів спільна, а дві інші — доповняльні промені. Якщо точки  $A$ ,  $O$ ,  $B$  лежать на одній прямій, а  $C$  — довільна точка, яка не належить прямій  $AB$ , то кути  $AOC$  і  $COB$  — суміжні (мал. 45).

Властивість суміжних кутів сформулюємо у вигляді *теорема*.

У математиці теоремою називають кожне твердження, істинність якого обґрунтовується за допомогою логічних міркувань. Ланцюжок таких міркувань називають *доведенням*<sup>1</sup>.

У нашому підручнику теореми надруковано жирним шрифтом і прономеровано.

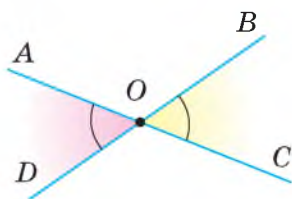
### Теорема 1 Сума мір двох суміжних кутів дорівнює $180^\circ$ .

**Доведення.** Об'єднання двох суміжних кутів є розгорнутим кутом. Міра розгорнутого кута дорівнює  $180^\circ$ . Отже, якими б не були суміжні кути, сума їх мір дорівнює  $180^\circ$ . ▲

Два кути називають *вертикальними*, якщо сторони одного є доповняльними променями сторін другого.

Наприклад, якщо прямі  $AC$  і  $BD$  перетинаються в точці  $O$ , то кути  $AOD$  і  $BOC$  — вертикальні (мал. 46). Кожний із них суміжний із кутом  $AOB$ . Кути  $AOB$  і  $COD$  також вертикальні.

### Теорема 2 Вертикальні кути рівні.



Мал. 46

**Доведення.** Нехай  $AOD$  і  $BOC$  — довільні вертикальні кути (мал. 46). Кожний із них суміжний із кутом  $AOB$ . За теоремою про суміжні кути:

$$\angle AOD + \angle AOB = 180^\circ \text{ і } \angle BOC + \angle AOB = 180^\circ,$$

$$\angle AOD = 180^\circ - \angle AOB \text{ і } \angle BOC = 180^\circ - \angle AOB.$$

Праві частини цих рівностей однакові, тому  $\angle AOD = \angle BOC$ . А це й треба було довести. ▲

<sup>1</sup> Детальні відомості про теореми, їх структуру та види прочитайте на с. 57 (§ 8).

**Для допитливих**

1. Слово *суміжні* вживають не тільки щодо кутів. *Суміжний* — той, що має спільну межу, прилеглий до чогось, сусідній. Можна говорити про суміжні кімнати, суміжні поля тощо. Стосовно кутів це поняття має особливий зміст.

Не будь-які два кути зі спільною межею називають суміжними. Наприклад, зображені на малюнку 47 кути  $AOB$  і  $BOC$  мають спільну сторону  $OB$ , але не є суміжними кутами.

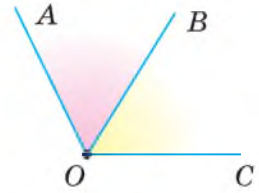
Суміжні кути — це два кути, які перебувають у певному відношенні.

Один кут не може бути суміжним. Якщо говоримо, що якийсь кут суміжний, то обов'язково маємо закінчити думку: суміжний з яким кутом? Відношення суміжності кутів має таку властивість: **якщо кут  $A$  суміжний з кутом  $B$ , то і кут  $B$  суміжний з кутом  $A$ .**

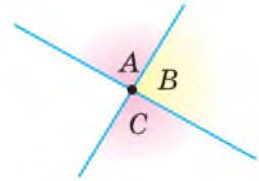
Нехай кут  $A$  суміжний з кутом  $B$ , а кут  $B$  суміжний з кутом  $C$ . Що можна сказати про кути  $A$  і  $C$ ? Вони або вертикальні, або кут  $C$  — той самий кут  $A$  (мал. 48).

2. Слово *вертикальні* також стосується не тільки кутів. Здебільшого вертикально розміщеним вважають продовгуватий предмет, розташований в напрямі виска (перпендикулярно до горизонту).

Завжди правильна властивість: **якщо кут  $A$  вертикальний з кутом  $C$ , то і кут  $C$  вертикальний з кутом  $A$ .**



Мал. 47



Мал. 48

**Запитання і завдання для самоконтролю**

1. Які кути називають суміжними?
2. Сформулюйте і доведіть властивість суміжних кутів.
3. Які кути називають вертикальними?
4. Сформулюйте і доведіть властивість вертикальних кутів.

**Виконаємо разом**

1. Знайдіть міри суміжних кутів, якщо один із них на  $50^\circ$  більший, ніж інший.

▼ Нехай міра меншого із суміжних кутів дорівнює  $x$ , тоді міра більшого кута —  $x + 50^\circ$ . За властивістю суміжних кутів  $x + x + 50^\circ = 180^\circ$ , звідси  $x = 65^\circ$ , а  $x + 50^\circ = 115^\circ$ . Отже, це кути  $65^\circ$  і  $115^\circ$ . ▲

2. Один із чотирьох кутів, які утворилися при перетині двох прямих, удвічі більший від іншого. Знайдіть міру кожного з утворених кутів.

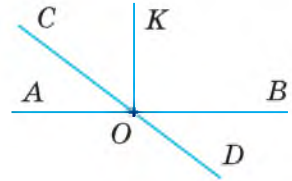
▼ При перетині двох прямих утворюються вертикальні і суміжні кути. Оскільки вертикальні кути рівні, то вони умову задачі не задовольняють. Робимо висновок: один із суміжних кутів удвічі більший за інший,

їх міри —  $x$  і  $2x$ . За властивістю суміжних кутів  $x + 2x = 180^\circ$ , звідси  $x = 60^\circ$ , а  $2x = 120^\circ$ . Відповідні їм вертикальні кути також дорівнюють  $60^\circ$  і  $120^\circ$ . Отже, це кути —  $60^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ . ▲

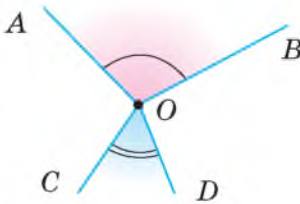
## ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

### Виконайте усно

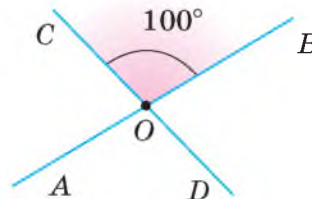
96. Назвіть пари суміжних кутів, зображених на малюнку 49.
97. Чи можна вважати суміжними кути  $KOB$  і  $KOA$ , зображені на малюнку 49? А кути  $AOC$  і  $AOD$ ?
98. Дано гострий кут  $A$ . Чи може бути гострим суміжний з ним кут? А прямим?
99. Дано тупий кут. Яким є суміжний з ним кут?
100. Сума кутів  $A$  і  $B$  дорівнює  $180^\circ$ . Чи суміжні вони?
101. Розгорнутий кут двома внутрішніми променями розбито на три менші кути. Чи можна їх уважати суміжними кутами?
102. Чи вертикальні кути  $AOB$  і  $COD$ , зображені на малюнку 50?
103. Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює  $100^\circ$ . Знайдіть міри трьох інших кутів (мал. 51).



Мал. 49



Мал. 50



Мал. 51

### А

104. Міра одного з двох суміжних кутів дорівнює  $50^\circ$ . Знайдіть міру іншого кута. Побудуйте ці кути.
105. Дано кут, міра якого дорівнює  $160^\circ$ . Знайдіть міру суміжного з ним кута. Побудуйте ці кути. Зафарбуйте їх різними кольорами.
106. Знайдіть міру кута, суміжного з кутом  $ABC$ , якщо:
- а)  $\angle ABC = 34^\circ$ ;      б)  $\angle ABC = 111^\circ$ ;  
в)  $\angle ABC = 13^\circ 13'$ ;      г)  $\angle ABC = 135^\circ 47'$ .
107. Доведіть, що якщо суміжні кути рівні, то вони прямі.



108. Знайдіть міри суміжних кутів, якщо один із них:  
 а) на  $30^\circ$  більший за інший;  
 б) у два рази менший від іншого.
109. Знайдіть міри суміжних кутів, які відносяться як:  
 а)  $4 : 5$ ; б)  $3 : 2$ .
110. Накресліть кут, що має  $45^\circ$ . Побудуйте вертикальний йому кут.
111. Сума мір двох вертикальних кутів дорівнює  $120^\circ$ . Знайдіть міру кожного з цих кутів.
112. Знайдіть міри кутів, утворених при перетині двох прямих, якщо міра одного з них дорівнює:  
 а)  $50^\circ$ ; б)  $110^\circ$ ; в)  $n^\circ$ .
113. Перенесіть таблицю в зошит і заповніть її.

Даний кут	$10^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$170^\circ$
Вертикальний із ним кут						
Суміжний із ним кут						

114. Перемалюйте в зошит малюнок 46 і подану нижче таблицю. Використовуючи малюнок, заповніть порожні клітинки таблиці.

$\angle AOD$	$66^\circ$					$50^\circ 5'$		
$\angle AOB$		$135^\circ$			$177^\circ$			
$\angle BOC$				$39^\circ$			$33^\circ 33'$	
$\angle DOC$			$97^\circ$					$99^\circ 9'$

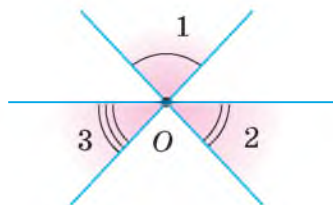
## Б

115. Чи можуть кути, що утворилися при перетині двох прямих, бути пропорційними числам:  
 а) 2, 3, 4 і 5;  
 б) 5, 5, 5 і 8;  
 в) 2, 3, 2 і 3;  
 г) 1, 4, 1 і 4?
116. Накресліть куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Чи можна вважати суміжними його кути  $ABB_1$  і  $B_1 BC$ ? Чому? Чому дорівнює міра кута, суміжного з кутом  $ABB_1$ ?
117. Намалюйте три прямі так, щоб вони перетиналися в одній точці. Скільки пар вертикальних кутів утворилося?

118. Скільки пар вертикальних кутів і скільки пар суміжних кутів зображено на малюнку 52?
119. На малюнку 53 зображено три прямі, які перетинаються в точці  $O$ . Доведіть, що  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ .

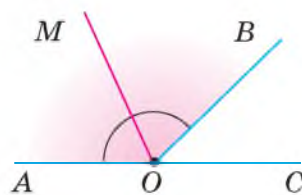


Мал. 52



Мал. 53

120. Знайдіть міри кутів, утворених при перетині двох прямих, якщо:
- один із них на  $50^\circ$  більший за інший;
  - один із них дорівнює половині іншого;
  - сума мір двох із цих кутів дорівнює  $100^\circ$ .
121. Кут  $\angle AOB$  має  $180^\circ$ , промінь  $OM$  ділить його на два кути, один із яких більший за інший на  $20^\circ$ . Знайдіть міри цих двох кутів, а також кут між їх бісектрисами.
122. Кути  $\angle AOB$  і  $\angle BOC$  — суміжні,  $OM$  — бісектриса кута  $\angle BOC$ . Знайдіть  $\angle AOB$ , якщо:
- $\angle MOC = 30^\circ$ ;
  - $\angle MOC = 45^\circ$ ;
  - $\angle MOC = 60^\circ$ .
123. Доведіть, що кути, суміжні з рівними кутами, рівні.
124. Знайдіть міру кута, якщо сума двох суміжних із ним кутів дорівнює  $100^\circ$ .
125. Кути  $\angle AOB$  і  $\angle BOC$  — суміжні.  $OM$  — бісектриса кута  $\angle AOB$  (мал. 54). Знайдіть  $\angle MOB$ , якщо:
- $\angle AOB - \angle BOC = 40^\circ$ ;
  - $\angle AOB : \angle BOC = 5$ ;
  - $\angle AOB : \angle BOC = 5 : 4$ ;
  - $\angle BOC$  становить  $\frac{2}{5} \angle AOB$ .



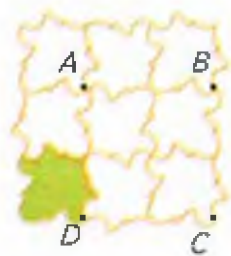
Мал. 54

### Практичне завдання

126. Перегинаючи аркуш паперу, утворіть пару суміжних кутів і пару вертикальних кутів.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

127. Ребра двох кубів відносяться як  $1 : 2$ . Як відносяться їх об'єми? А площі поверхонь?
128. Позначте на координатній площині точки  $A(1; -1)$ ,  $B(1; 3)$ ,  $C(5; 3)$ ;  $D(5; -1)$  і сполучіть їх послідовно відрізками. Як називається утворена фігура  $ABCD$ ? Які з її сторін паралельні, а які — перпендикулярні?
129. Круг радіуса  $3$  см поділіть радіусами на  $6$  рівних секторів. Знайдіть площу одного такого сектора. На скільки вона менша від площі всього круга?
130. Фігура, зображена на малюнку 55, складається з  $9$  рівних листків. Знайдіть площу одного листка, якщо  $A, B, C, D$  — вершини квадрата з площею  $S$ .



Мал. 55



## Геометрія навколо нас



## ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

А

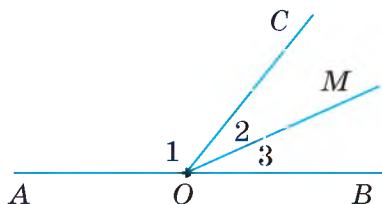
Б

1

Знайдіть пари суміжних кутів.

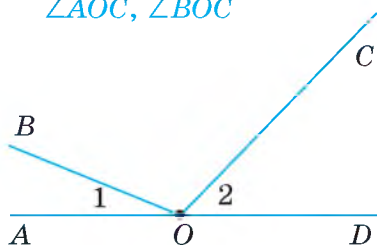


$$\frac{\angle 1 = 120^\circ, \angle 2 = \angle 3.}{\angle 2, \angle AOM}$$

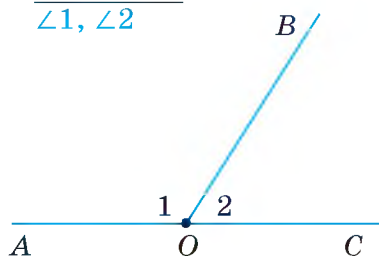


2

$$\frac{\angle 1 = 30^\circ, \angle 2 = 45^\circ.}{\angle AOC, \angle BOC}$$

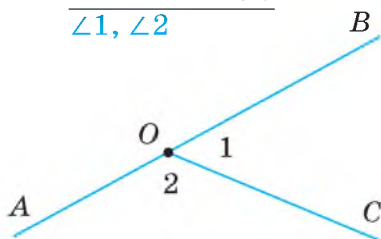


$$\frac{\angle 1 = 2\angle 2.}{\angle 1, \angle 2}$$

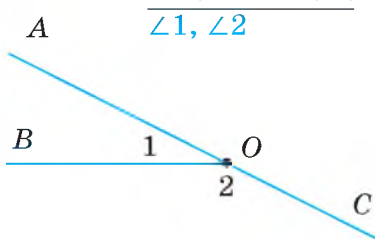


3

$$\frac{\angle 2 - \angle 1 = 40^\circ.}{\angle 1, \angle 2}$$

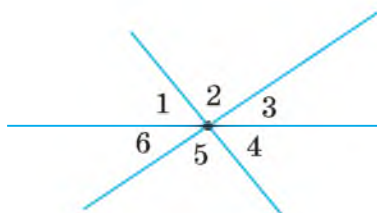


$$\frac{\angle 1 : \angle 2 = 2 : 7.}{\angle 1, \angle 2}$$

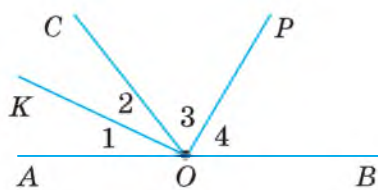


4

$$\frac{\angle 1 = 60^\circ, \angle 3 = 40^\circ.}{\angle 2, \angle 4, \angle 5, \angle 6}$$

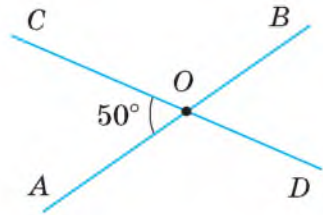


$$\frac{\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4.}{\text{Довести: } \angle KOP = 90^\circ.}$$



## § 5. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ І ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

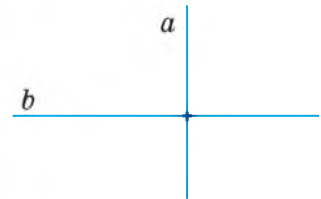
Пригадайте, як можуть розташовуватися на площині дві прямі. Якщо вони перетинаються, то утворюють чотири кути — дві пари вертикальних кутів. Йдеться про кути, менші від розгорнутого. Менший із цих кутів вважають *кутом між даними прямими*. Наприклад, на малюнку 56 прямі  $AB$  і  $CD$  перетинаються під кутом  $50^\circ$ .



Мал. 56

Кажуть також, що кут між прямими  $AB$  і  $CD$  дорівнює  $50^\circ$ . Якщо дві прямі, перетинаючись, утворюють чотири прямі кути, кажуть, що вони перетинаються під прямим кутом.

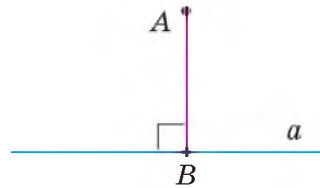
Дві прямі, які перетинаються під прямим кутом, називають *перпендикулярними прямими*. Прямі  $a$  і  $b$  на малюнку 57 перпендикулярні одна до одної. Коротко пишуть:  $a \perp b$ , або  $b \perp a$ .



Мал. 57

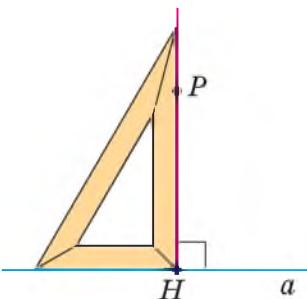
*Відрізки* або *промені* називають *перпендикулярними*, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.

Якщо відрізок  $AB$  лежить на прямій, перпендикулярній до прямої  $a$ , кажуть, що *відрізок  $AB$  перпендикулярний до прямої  $a$* . Якщо при цьому точка  $B$  належить прямій  $a$ , то відрізок  $AB$  називають *перпендикуляром*, проведеним з точки  $A$  на пряму  $a$  (мал. 58). Точку  $B$  називають *основою перпендикуляра*, а довжину перпендикуляра  $AB$  — *відстанню від точки  $A$  до прямої  $a$* .

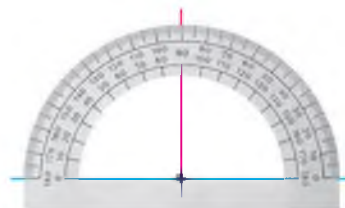


Мал. 58

Через довільну точку  $P$  завжди можна провести пряму, перпендикулярну до даної прямої  $a$ . Це можна зробити, користуючись косинцем (мал. 59) або транспортиром (мал. 60).

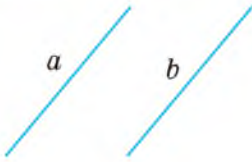


Мал. 59

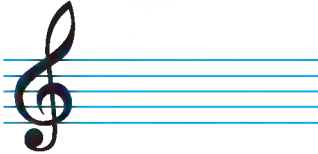


Мал. 60

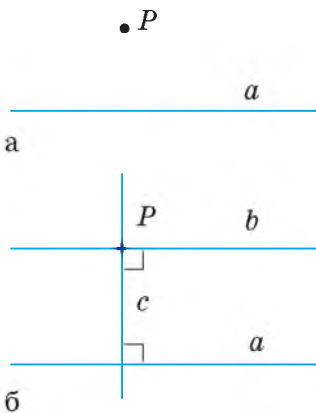




Мал. 61



Мал. 62



Мал. 63

Згодом дізнаєтесь, як можна виконати таку побудову за допомогою лінійки і циркуля. Можна довести, що існує тільки одна пряма, яка перпендикулярна до даної прямої і проходить через дану точку.

Не кожні дві прямі перетинаються. Особливої уваги заслуговують прямі, які не перетинаються і лежать в одній площині.

Дві прямі на площині називають *паралельними*, якщо вони не перетинаються. Якщо прямі  $a$  і  $b$  паралельні, пишуть:  $a \parallel b$  (мал. 61).

Уявлення про паралельні прямі дають лінії в зошиті, лінії нотного стану (мал. 62), протилежні ребра бруска.

Два *відрізки* або *промені* називають паралельними, якщо вони лежать на паралельних прямих. Наприклад, якщо  $ABCD$  — прямокутник, то  $AB \parallel DC$  і  $BC \parallel AD$ .

Через будь-яку точку  $P$ , яка не лежить на прямій  $a$ , можна провести пряму, паралельну прямій  $a$  (мал. 63, а). Для цього можна через точку  $P$  провести пряму  $c$ , перпендикулярну до прямої  $a$ , а потім пряму  $b$ , перпендикулярну до прямої  $c$  (мал. 63. б). За такої побудови завжди  $b \parallel a$ . Можна скористатися також лінійкою і косинцем.

Як проводити паралельні прямі, користуючись лінійкою і циркулем, дізнаєтесь пізніше.

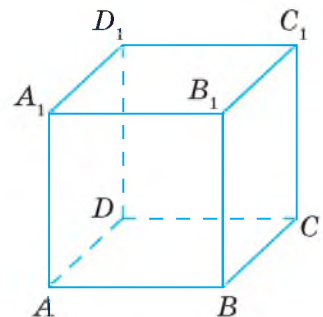
## Для допитливих

1. Можна довести (спробуйте!), що дві прямі однієї площини, які перпендикулярні до третьої прямої, — паралельні. Тобто, якщо  $a \perp c$ ,  $b \perp c$ , то  $a \parallel b$ .

Але якщо прямі  $a$  і  $b$  не належать одній площині, то таке твердження неправильне. Наприклад, якщо  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб, то  $AB \perp BB_1$  і  $B_1 C_1 \perp BB_1$ , але прямі  $AB$  і  $B_1 C_1$ , не паралельні (мал. 64).

2. Слово *паралельні* походить від грецького слова «параллелос», яке означає: ті, що йдуть поруч. Якщо говорять, що якась пряма паралельна, то обов'язково слід сказати, якій саме прямій вона паралельна.

Отже, паралельність прямих — це своєрідне відношення між двома прямими. *Відношення паралельності прямих* має таку властивість: якщо  $a \parallel b$  то і  $b \parallel a$ . Іншими відношеннями є перпендикулярність прямих, рівність кутів тощо. Знаки цих відношень:  $\parallel$ ,  $\perp$ ,  $=$ .



Мал. 64

### Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що таке *кут між прямими*?
2. Сформулюйте означення перпендикулярних прямих.
3. Які відрізки називають перпендикулярними?
4. Які дві прямі називають паралельними?
5. Які відрізки називають паралельними?
6. За допомогою яких креслярських інструментів можна провести пряму, перпендикулярну до даної прямої? Як це роблять?
7. Як можна провести пряму, паралельну даній прямій?

### Виконаємо разом

1. Доведіть, що бісектриси суміжних кутів перпендикулярні.

▼ Нехай  $\angle AOB$  і  $\angle BOC$  — суміжні кути.  $OK$  і  $OP$  — їх бісектриси (мал. 65).  $\angle KOP = \angle KOB + \angle BOP$ . Оскільки  $OK$  і  $OP$  — бісектриси, то

$$\angle KOB = \frac{1}{2} \angle AOB, \angle BOP = \frac{1}{2} \angle BOC.$$

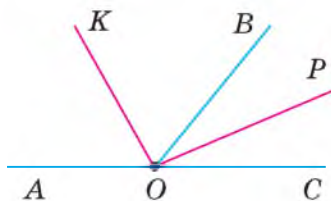
$$\text{Тоді } \angle KOP = \frac{1}{2} \angle AOB + \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} (\angle AOB + \angle BOC) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

Отже,  $OK \perp OP$ . ▲

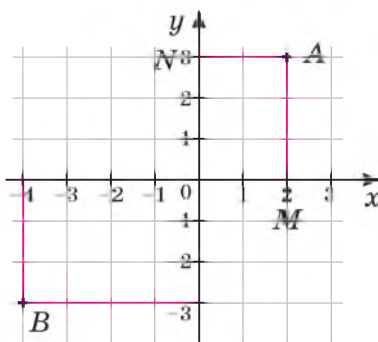
2. Позначте на координатній площині точки  $A(2; 3)$  і  $B(-4; -3)$ . Знайдіть відстань від цих точок до осей координат, якщо довжина одиничного відрізка дорівнює 1 см.

▼ З точок  $A$  і  $B$  опустимо перпендикуляри на осі координат (мал. 66). Довжина відрізка  $AM$  — відстань від точки  $A$  до осі  $OX$ , а довжина відрізка  $AN$  — відстань від точки  $A$  до осі  $OY$ . З малюнка видно, що  $AM = 3$  см, а  $AN = 2$  см.

Аналогічно встановлюємо, що відстань від точки  $B$  до осей координат дорівнює 3 см і 4 см. ▲



Мал. 65



Мал. 66

## ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

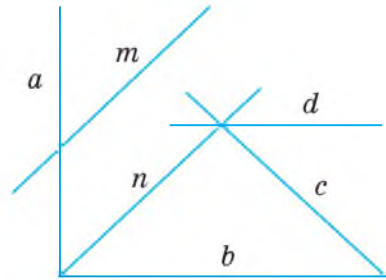
## Виконайте усно

131. Наведіть приклади матеріальних моделей:

- а) перпендикулярних прямих;  
б) паралельних прямих.

132. Які з прямих, зображених на малюнку 67:

- а) перпендикулярні;  
б) паралельні?



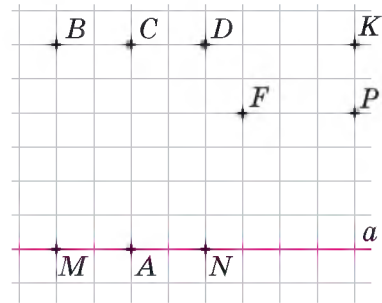
Мал. 67

133. Користуючись клітинками зошита (мал. 68) укажіть:

- 1) через яку точку пройде пряма, яка:  
а) перпендикулярна до прямої  $a$  і проходить через точку  $A$ ;  
б) перпендикулярна до прямої  $a$  і проходить через точку  $D$ ;  
в) паралельна прямій  $a$  і проходить через точку  $F$ ;  
г) паралельна прямій  $a$  і проходить через точку  $K$ ;

2) яке з тверджень правильне:

- а)  $AB \perp a$ ;                      б)  $BM \perp a$ ;  
в)  $KP \perp a$ ;                      г)  $FK \parallel a$ ;  
г)  $BC \parallel a$ ;                      д)  $KP \parallel a$ .



Мал. 68

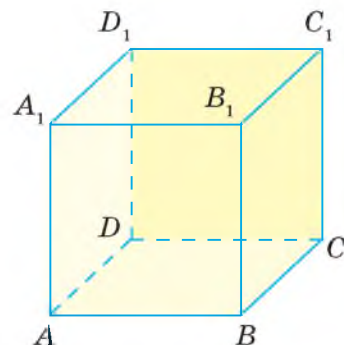
134.  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямокутний паралелепіпед (мал. 69).

1) Назвіть відрізки:

- а) паралельні відрізку  $AA_1$ ;  
б) паралельні відрізку  $AD$ ;  
в) перпендикулярні до відрізка  $AA_1$ ;  
г) перпендикулярні до відрізка  $AD$ .

2) Яке з тверджень правильне:

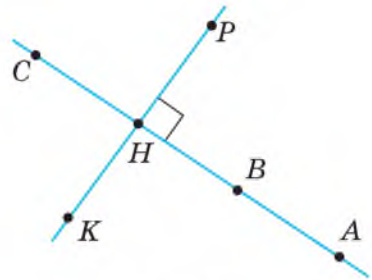
- а)  $AA_1 \perp AD$ ;                      б)  $B_1 C_1 \perp A_1 B_1$ ;  
в)  $DC \perp AB$ ;                      г)  $D_1 B \perp DB$ ;  
г)  $CD \parallel C_1 D_1$ ;                      д)  $A_1 D_1 \parallel AD$ ;  
е)  $DD_1 \parallel A_1 D_1$ ;                      е)  $CD \parallel AB$ ?



Мал. 69

## А

135. Проведіть пряму  $a$  і позначте точки  $M$  і  $N$  такі, що  $M \in a$ ,  $N \notin a$ . Користуючись клітинками зошита, проведіть через точки  $M$  і  $N$  прямі, перпендикулярні до прямої  $a$ .
136. Точки  $M$  і  $N$  лежать по різні боки від прямої  $a$ . Користуючись клітинками зошита, через точки  $M$  і  $N$  проведіть прямі, паралельні прямій  $a$ .
137. Точка  $A$  не лежить на прямій  $c$ . Скільки прямих, перпендикулярних до прямої  $c$ , можна провести через точку  $A$ ? Чому?
138. Точка  $K$  не лежить на прямій  $a$ . Користуючись косинцем, побудуйте перпендикуляр, проведений із точки  $K$  до прямої  $a$ .
139. Назвіть десять пар перпендикулярних відрізків, що є на малюнку 70. Чи є перпендикулярами до прямої  $KP$  відрізки  $AN$ ,  $BH$ ,  $CH$ ,  $AB$ ,  $BC$ ?
140. Відомо, що  $a \parallel b$ . Чи правильно, що  $b \parallel a$ ?
141. Промені  $AB$  і  $CD$  не перетинаються. Чи можна стверджувати, що вони паралельні?
142. Використовуючи малюнок 67 і символи  $\perp$  і  $\parallel$ , заповніть пропуски:  
а)  $a \dots b$ ; б)  $m \dots n$ ; в)  $n \dots c$ ; г)  $a \dots d$ ; ґ)  $m \dots c$ ; д)  $b \dots d$ .
143. Перпендикулярні прямі  $AB$  та  $CD$  перетинаються в точці  $O$ .  $OM$  — бісектриса кута  $COB$ . Знайдіть  $\angle AOM$  і  $\angle MOD$ .
144. Позначте на координатній площині точки  $A(-3; 4)$ ,  $B(1; 8)$ ,  $C(4; 5)$ ,  $D(-2; -1)$ . Перевірте, чи перпендикулярні прямі  $AD$  і  $DC$ ,  $AB$  і  $BC$ . Чи паралельні прямі  $AB$  і  $CD$ ,  $AD$  і  $BC$ ?
145. Позначте на координатній площині точки  $A(-3; -1)$  і  $B(2; 4)$ . Через ці точки проведіть прямі, перпендикулярні до прямої  $AB$ . Знайдіть координати точок перетину побудованих прямих з осями координат. Чи паралельні побудовані прямі?
146. За допомогою транспортира побудуйте  $\angle AOB = 30^\circ$ . Позначте точку  $M$  таку, що  $M \in OA$  і  $OM = 4$  см. Із точки  $M$  опустіть перпендикуляр на пряму  $OB$ . Виміряйте відстань від точки  $M$  до  $OB$ .
147. За допомогою транспортира побудуйте  $\angle AOB = 130^\circ$ . Позначте  $M \in OA$ . Із точки  $M$  опустіть перпендикуляр на пряму  $OB$ . Чи лежатиме основа перпендикуляра на промені  $OB$ ? А на прямій  $OB$ ?
148.  $\angle AOB = 90^\circ$ ,  $M$  — внутрішня точка кута  $AOB$ . Через точку  $M$  проведіть прямі, паралельні сторонам кута. Переконайтеся, що побудовані прямі перпендикулярні.



Мал. 70

149.  $\angle AOB = 90^\circ$ ,  $M$  — довільна точка бісектриси кута  $AOB$ . Виміряйте відстані від точки  $M$  до променів  $OB$  і  $OA$ . Порівняйте ці відстані.

## Б

150.  $\angle AOB$  і  $\angle BOC$  — суміжні кути.  $OM$  — внутрішній промінь кута  $AOB$ ,  $OM \perp AC$ . Чому дорівнює  $\angle MOB$ , якщо:

а)  $\angle BOC = 40^\circ$ ; б)  $\angle AOB - \angle BOC = 30^\circ$ ;

в)  $\angle AOB : \angle BOC = 3 : 2$ ; г)  $\angle BOC = \frac{1}{3} \angle AOB$ ?

151. Три прямі  $AB$ ,  $CD$ ,  $MN$  перетинаються в точці  $O$  (мал. 71). Доведіть, що  $CD \perp MN$ , якщо:

а)  $\angle AOM = 130^\circ$ ,  $\angle COB = 140^\circ$ ;

б)  $\angle COM = \angle AOC + \angle MOB$ ;

в)  $\angle AOM = 135^\circ$ ,  $OB$  — бісектриса кута  $MOD$ .

152.  $\angle AOB = 90^\circ$ . Побудуйте точку  $M$ , яка лежить у внутрішній області кута  $AOB$  на відстані 2 см від кожної сторони кута.

153. Побудуйте перпендикулярні прямі  $a$ ,  $c$  і точку  $M$ , яка лежить на відстані 3 см від прямої  $a$  і на відстані 1 см від прямої  $c$ .

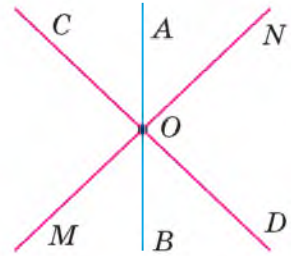
154. За допомогою транспортира побудуйте  $\angle AOB = 80^\circ$  і проведіть його бісектрису  $OM$ . Через довільну точку  $K$  цієї бісектриси проведіть прямі, перпендикулярні до сторін кута. Виміряйте відстані від точки  $K$  до сторін кута і порівняйте їх.

155. Розв'яжіть попередню задачу, якщо  $\angle AOB$  дорівнює  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  і  $130^\circ$ . Сформулюйте припущення про відстань від точок бісектриси кута до сторін цього кута.

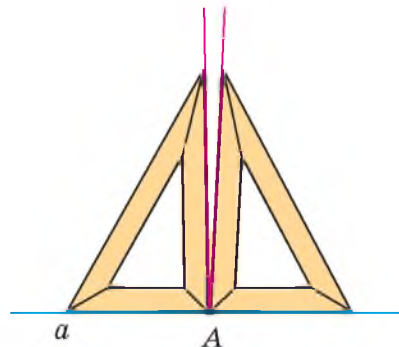
156. За допомогою транспортира побудуйте  $\angle AOB = 60^\circ$  і проведіть його бісектрису  $OM$ . Через довільну точку  $K$  цієї бісектриси проведіть пряму  $EF$ , перпендикулярну до  $OM$ . Порівняйте довжини відрізків  $OE$  і  $OF$ , якщо  $E \in OA$ ,  $F \in OB$ .

157. Розв'яжіть попередню задачу, якщо  $\angle AOB$  дорівнює  $80^\circ$ ,  $90^\circ$  і  $120^\circ$ . Сформулюйте припущення про властивість прямої, перпендикулярної до бісектриси кута.

158. Прикладаючи косинець то одним, то іншим боком, учень через точку  $A$  провів два перпендикуляри до прямої  $a$  (мал. 72). Що можна сказати про такий косинець?



Мал. 71



Мал. 72



**Практичне завдання**

159. Підготуйте презентацію на тему:

- а) «Паралельні прямі навколо нас»; б) «Перпендикулярні прямі навколо нас».

**ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ**

160. Позначте на прямій  $a$  точки  $A, B, C, D, M$  так, щоб точка  $B$  лежала між точками  $A$  і  $D$ , точка  $M$  — між  $A$  і  $B$ , а точка  $C$  — між  $B$  і  $D$ .
161. Чи належить точка  $K$  відрізку  $AB$ , якщо  $AK = 3$  см,  $BK = 5$  см,  $AB = 7$  см?
162. Знайдіть міри суміжних кутів, якщо вони пропорційні числам:  
а) 1 і 2; б) 1 і 4; в) 4 і 5; г)  $\frac{1}{2}$  і  $\frac{1}{3}$ .
163. Периметр чотирикутника дорівнює  $P$ . Знайдіть довжини його сторін, якщо вони пропорційні числам:  
а) 1, 2; 3 і 4; б) 3, 5, 3 і 7; в)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$  і 1.

**§ 6. ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ**

Важливу роль у дослідженні паралельності прямих відіграють поняття січної та деяких пар кутів.

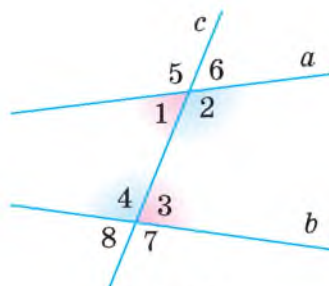
Нехай  $a$  і  $b$  — дві довільні прямі площини. Прямую  $c$ , що їх перетинає, називають *січною* прямих  $a$  і  $b$  (мал. 73).

Прямі  $a$  і  $b$  з їх січною  $c$  утворюють 8 кутів. На малюнку 73 їх пронумеровано.

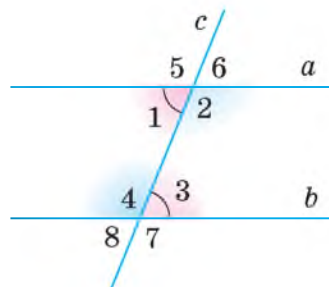
Деякі пари цих кутів мають спеціальні назви:  
*внутрішні різносторонні кути*: 1 і 3, 2 і 4;  
*внутрішні односторонні кути*: 1 і 4, 2 і 3;  
*відповідні кути*: 1 і 8, 2 і 7, 3 і 6, 4 і 5.

**Зверніть увагу!** Якщо два які-небудь внутрішні різносторонні кути рівні, то рівні також внутрішні різносторонні кути іншої пари (мал. 74). Якщо, наприклад,  $\angle 1 = \angle 3$ , то  $\angle 2 = \angle 4$ , бо кути, суміжні з рівними, — рівні.

Випадок, коли внутрішні різносторонні кути рівні, заслуговує на особливу увагу, тому що саме за цієї умови прямі  $a$  і  $b$  паралельні.



Мал. 73

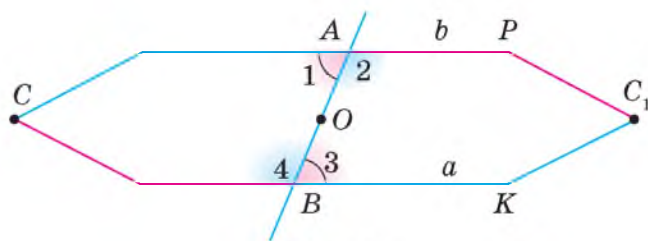


Мал. 74

**Теорема 3** (ознака паралельності прямих)

Дві прямі паралельні, якщо із січною вони утворюють рівні внутрішні різносторонні кути.

**Доведення.** Нехай січна  $AB$  перетинає прямі  $a$  і  $b$  так, що утворені при цьому внутрішні різносторонні кути  $1$  і  $3$  дорівнюють один одному. Тоді, як показано вище, кути  $2$  і  $4$  також рівні. Припустимо, що за такої умови прямі  $a$  і  $b$  перетинаються в якійсь віддаленій точці  $C$ . У результаті утвориться трикутник  $ABC$  (на малюнку 75 схематично його зображено у вигляді п'ятикутника). Уявимо, що цей трикутник повернуто навколо точки  $O$  — середини відрізка  $AB$  — так, щоб відрізок  $OA$  зайняв положення  $OB$ . Тоді, оскільки  $\angle 1 = \angle 3$  і  $\angle 2 = \angle 4$ , промінь  $AC$  суміститься з променем  $BK$ , а промінь  $BC$  — з променем  $AP$ . Оскільки промені  $AC$  і  $BC$  (за припущенням) мають спільну точку  $C$ , то промені  $BK$  і  $AP$  також мають якусь спільну точку  $C_1$ . А це означає, що через дві точки  $C$  і  $C_1$ , проведено дві різні прямі. Такого не може бути.



Мал. 75

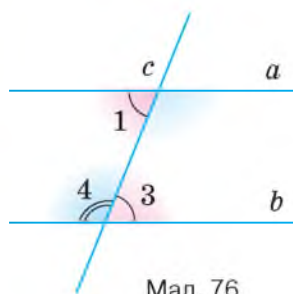
Отже, якщо  $\angle 1 = \angle 3$ , то прямі  $a$  і  $b$  не можуть перетинатися. А оскільки вони лежать в одній площині і не перетинаються, то вони паралельні:  $a \parallel b$ . Це й треба було довести.  $\blacktriangle$

Зверніть увагу на спосіб доведення теореми 3. Щоб довести, що прямі  $a$  і  $b$  паралельні, ми показували, що вони не можуть перетинатися. Тобто припускали супротивне тому, що треба було довести. Такий спосіб міркувань називають *методом доведення від супротивного*.

На основі доведеної теореми 3 неважко довести й інші ознаки паралельності прямих.

**Теорема 4** Дві прямі паралельні, якщо при перетині з січною вони утворюють внутрішні односторонні кути, сума яких дорівнює  $180^\circ$ .

**Доведення.** Нехай, наприклад, на малюнку 76 сума внутрішніх односторонніх кутів  $1$  і  $4$  дорівнює  $180^\circ$ . Сума суміжних кутів  $3$  і  $4$  також дорівнює  $180^\circ$ . Тому  $\angle 1 = \angle 3$ . Це — внутрішні різносторонні кути. Якщо вони рівні, то прямі  $a$  і  $b$  паралельні.



Мал. 76

**Теорема 5** Дві прямі паралельні, якщо, перетинаючись із січною, вони утворюють рівні відповідні кути.

**Доведення.** Нехай січна  $c$  перетинає прямі  $a$  і  $b$  так, що утворені при цьому відповідні кути 1 і 8 рівні (мал. 77). Кути 8 і 3 рівні, бо вертикальні. Тому якщо  $\angle 1 = \angle 8$ ,  $\angle 8 = \angle 3$ , то і  $\angle 1 = \angle 3$ , звідси випливає, що  $a \parallel b$ .  $\blacktriangle$

Заслуговує на увагу такий наслідок із теореми 3.

**Наслідок** Дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.

Адже якщо кожна з прямих  $a$  і  $b$  перпендикулярна до  $c$ , то утворені при цьому внутрішні різносторонні кути рівні, бо вони дорівнюють по  $90^\circ$  (мал. 78). Отже, прямі  $a$  і  $b$  — паралельні.

## Для допитливих

1. Кути 5 і 7 (а також 6 і 8) називають *зовнішніми різносторонніми*, а 5 і 8 (а також 6 і 7) — *зовнішніми односторонніми* кутами (мал. 79). Використовуючи ці поняття, спробуйте сформулювати і довести ще дві ознаки паралельності прямих.

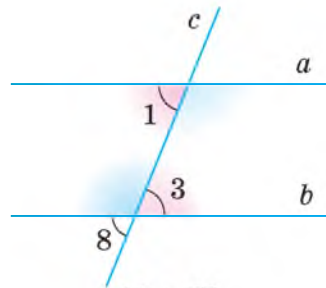
2. Корисно краще зрозуміти сутність методу доведення від супротивного.

Якщо твердження  $A$  заперечує твердження  $B$ , то такі два твердження називають *суперечливими* або *супротивними* одне одному. Із двох взаємно суперечливих тверджень завжди одне правильне, а інше — хибне. Тому якщо переконаємося, що твердження  $A$  і  $B$  суперечливі одне одному і, наприклад, що  $B$  неправильне, то можемо бути певні, що твердження  $A$  — правильне.

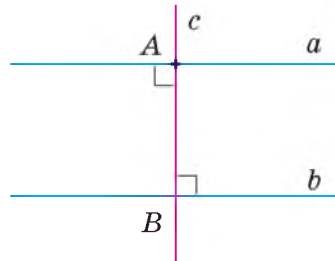
Не слід плутати твердження *супротивні* з *протилежними*. Наприклад, якщо йдеться про числові вирази і натуральні числа, то твердження: «вираз  $A$  — додатний» і «вираз  $A$  — від'ємний» або «число  $n$  — просте» і «число  $n$  — складене» — протилежні, але не супротивні, адже кожне з них може бути неправильним. А от твердження «вираз  $A$  — додатний» і «вираз  $A$  — недодатний» або «число  $n$  — просте» і «число  $n$  — непросте» — взаємно суперечливі. *Непросте* — означає складене або дорівнює 1; *недодатне* — від'ємне або дорівнює нулю.

**Доводячи методом від супротивного, спростовувати треба не протилежне твердження, а супротивне даному.**

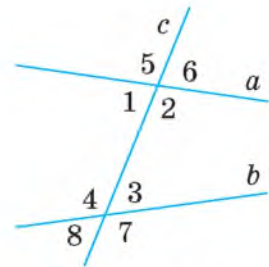
*Спростувати що-небудь* — означає показати, що воно неправильне.



Мал. 77



Мал. 78



Мал. 79

## Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення паралельних прямих.
2. Що таке січна двох прямих?
3. Які кути називають внутрішніми різносторонніми? А внутрішніми односторонніми? Покажіть на малюнку.
4. Які кути називають відповідними? Покажіть на малюнку.
5. Сформулюйте і доведіть ознаки паралельності прямих.

### Виконаємо разом

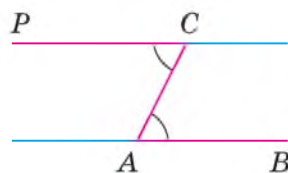
1. Як побудувати паралельні прямі, користуючись лише лінійкою і транспортиром?

✎ Накреслимо довільний промінь  $AB$  і відкладемо рівні кути  $BAC$  і  $ACP$ , як показано на малюнку 80. Прямі  $AB$  і  $CP$  — паралельні, адже кути  $BAC$  і  $ACP$  — внутрішні різносторонні, а за побудовою вони рівні. ▲

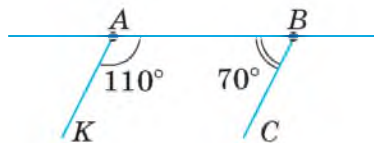
2. Через кінці відрізка  $AB$  з одного боку від прямої  $AB$  проведено промені  $AK$  і  $BC$  так, що  $\angle KAB = 110^\circ$ , а  $\angle ABC = 70^\circ$ . Чи паралельні ці промені?

✎ Прямую  $AB$  можна вважати січною прямих  $AK$  і  $BC$  (мал. 81).

Кути  $KAB$  і  $ABC$  — внутрішні односторонні. Оскільки їх сума  $110^\circ + 70^\circ$  дорівнює  $180^\circ$ , то прямі  $AK$  і  $BC$  — паралельні (теорема 4). Тому і промені  $AK$  і  $BC$  — паралельні. ▲



Мал. 80

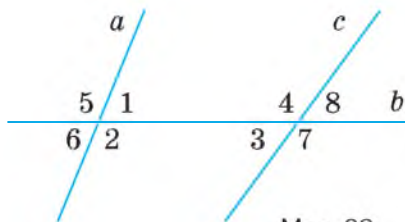


Мал. 81

## ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

### Виконайте усно

164. Скільки кутів утворюється при перетині двох прямих третьою?
165. Розгляньте малюнок 82 і назвіть пари кутів:
  - а) внутрішніх різносторонніх;
  - б) внутрішніх односторонніх;
  - в) зовнішніх різносторонніх;
  - г) зовнішніх односторонніх;
  - г) відповідних;
  - д) суміжних;
  - е) вертикальних.

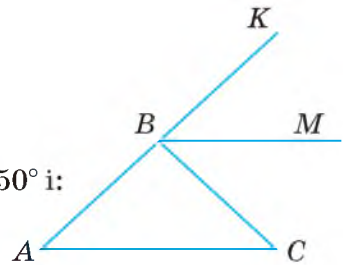


Мал. 82

166. Використовуючи малюнок 82, знайдіть суми мір кутів:  
 а) 1, 2, 3 і 4; б) 1, 3, 5 і 7; в) 1, 4, 5 і 8; г) 5, 6, 7 і 8.
167. Чи паралельні прямі  $a$  і  $c$  на малюнку 82, якщо:  
 а)  $\angle 6 = \angle 8$ ; б)  $\angle 7 = 101^\circ$  і  $\angle 5 = 101^\circ$ ;  
 в)  $\angle 5 + \angle 8 = 180^\circ$ ; г)  $\angle 1 + \angle 7 = 180^\circ$ ?
168. Як розташовані прямі  $a$  і  $b$ , якщо  $a \perp c$ ,  $b \perp c$  і всі вони лежать в одній площині?
169. Як можуть бути розміщені в просторі прямі  $a$  і  $b$ , якщо  $a \perp c$  і  $b \perp c$ ?

## А

170. Запишіть назви пар кутів, зображених на малюнку 82:  
 а)  $\angle 1$  і  $\angle 5$ ; в)  $\angle 7$  і  $\angle 2$ ; г)  $\angle 2$  і  $\angle 3$ ;  
 б)  $\angle 6$  і  $\angle 3$ ; г)  $\angle 3$  і  $\angle 1$ ; д)  $\angle 8$  і  $\angle 5$ .
171. Відомо, що  $\angle 1 = 87^\circ$ ,  $\angle 3 = 78^\circ$  (див. мал. 82). Обчисліть міри кутів 2, 4, 5, 6, 7, 8.
172. Скориставшись малюнком 82, обчисліть:  
 а) міри кутів 1, 2, 3, 4, 5, 8, якщо  $\angle 7 = 100^\circ$ ,  $\angle 6 = 90^\circ$ ;  
 б)  $\angle 1 + \angle 4$  і  $\angle 2 + \angle 3$ , якщо  $\angle 5 + \angle 8 = 170^\circ$ ;  
 в)  $\angle 4 - \angle 5$ , якщо  $\angle 4 - \angle 2 = 10^\circ$ .
173. Чи паралельні прямі  $a$  і  $c$  (див. мал. 82), якщо:  
 а)  $\angle 1 = 50^\circ$ ,  $\angle 7 = 130^\circ$ ;  
 б)  $\angle 6 = 65^\circ$ ;  $\angle 8 = 65^\circ$ ;  
 в)  $\angle 1 + \angle 7 = 180^\circ$ ;  
 г)  $\angle 2 = 140^\circ$ ,  $\angle 3$  на  $80^\circ$  менший від  $\angle 2$ ?
174.  $BM$  — бісектриса кута  $KBC$  (мал. 83).  
 Чи паралельні прямі  $AC$  і  $BM$ , якщо  $\angle A = 50^\circ$  і:  
 а)  $\angle CBM = 50^\circ$ ;  
 б)  $\angle ABM = 130^\circ$ ;  
 в)  $\angle BCA = \angle KBM$ ;  
 г)  $\angle ABM$  на  $50^\circ$  більший за  $\angle CAB$ ?



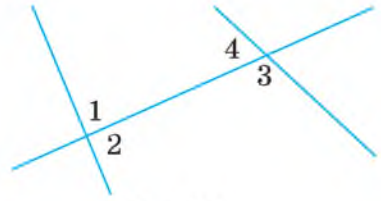
Мал. 83

175. Пряма  $KP$  перетинає пряму  $AB$  в точці  $K$ , а пряму  $CD$  — у точці  $P$ . Чи паралельні прямі  $AB$  і  $CD$ , якщо  $\angle AKP = 90^\circ$  і  $\angle KPC = 90^\circ$ ?
176. Пряма  $KP$  перетинає пряму  $AB$  в точці  $K$ , а пряму  $CD$  — у точці  $P$  так, що точки  $B$  і  $D$  лежать по один бік від прямої  $KP$ . Чи паралельні прямі  $AB$  і  $CD$ , якщо  $\angle BKP = 89^\circ 39'$  і  $\angle KPD = 90^\circ 21'$ ?
177. Через кінці відрізка  $AB$  з одного боку від нього проведено промені  $AP$  і  $BC$ . Чи паралельні ці промені, якщо:  
 а)  $\angle PAB = 105^\circ$ , а  $\angle ABC = 75^\circ$ ;  
 б)  $\angle PAB = 93^\circ$ , а  $\angle ABC = 87^\circ$ ?
178. Доведіть, що протилежні сторони прямокутника лежать на паралельних прямих.

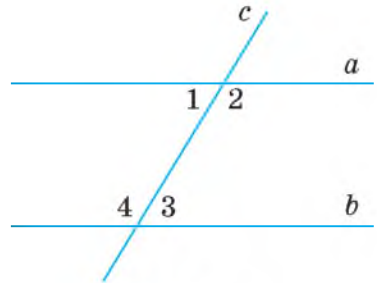


## Б

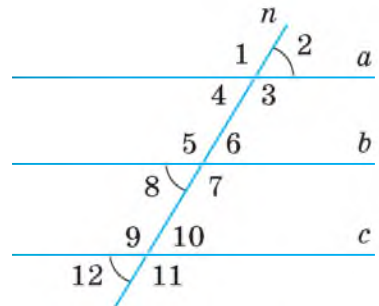
179. Прямі  $a$  і  $b$  з січною  $c$  утворюють рівні гострі кути. Чи впливає з цього, що  $a \parallel b$ ?
180. Знайдіть міри кутів 1 і 2, зображених на малюнку 84, якщо  $\angle 1 + \angle 4 = 160^\circ$  і:
- $\angle 4$  на  $20^\circ$  менший від  $\angle 1$ ;
  - $\angle 2$  у 2 рази більший за  $\angle 1$ ;
  - $\angle 4 : \angle 2 = 2 : 3$ ;
  - $\angle 4$  становить 60 % кута 2.
181. Чи паралельні прямі  $a$  і  $b$ , зображені на малюнку 85, якщо:
- $\angle 4 - \angle 1 = 30^\circ$  і  $\angle 3 = 75^\circ$ ;
  - $\angle 1 = 60^\circ$  і  $\angle 2 : \angle 3 = 2 : 1$ ?
182. Установіть взаємне розташування прямих  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , зображених на малюнку 86, якщо:
- $\angle 3 = \angle 5 = \angle 9$ ;
  - $\angle 2 = \angle 8$  і  $\angle 7 = \angle 9$ ;
  - $\angle 12 = \angle 8$  і  $\angle 6 + \angle 3 = 180^\circ$ .
183. Січна  $n$  перетинає прямі  $a$ ,  $b$  і  $c$  так, що кути позначені на малюнку 86 числами 2, 8 і 12, дорівнюють один одному. Доведіть, що прямі  $a$ ,  $b$  і  $c$  попарно паралельні.
184. У зображеному на малюнку 87 шестикутнику  $\angle 1 = \angle 4$ ,  $\angle 2 = \angle 5$  і  $\angle 3 = \angle 6$ . Доведіть, що кожна сторона даного шестикутника паралельна протилежній стороні.
185. Чи паралельні прямі  $a$  і  $b$ ,  $c$  і  $d$ , якщо:  $\angle 1 = 60^\circ$ ,  $\angle 2$  — удвічі більший, а  $\angle 2 - \angle 3 = 60^\circ$  (мал. 88)?
186. Як можна побудувати паралельні прямі, користуючись косинцем?
187. Користуючись двома однаковими косинцями, паралельні прямі можна проводити, як показано на малюнку 89. Обґрунтуйте таку побудову.
188. Закінчіть речення: «Щоб дізнатися, чи паралельні дані прямі, треба провести їх січну і виміряти відповідні кути. Якщо...»



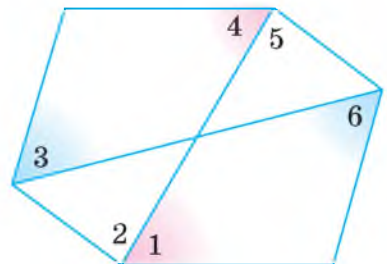
Мал. 84



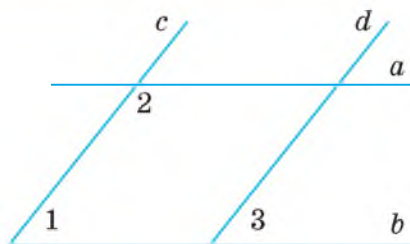
Мал. 85



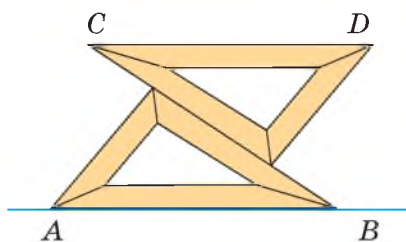
Мал. 86



Мал. 87



Мал. 88



Мал. 89

### Практичне завдання

189. Зробіть модель для ілюстрації доведення теореми 3.

### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

190. Сторони трикутника дорівнюють 12 см, 15 см і 18 см. У скільки разів зменшиться периметр трикутника, якщо кожен його сторону зменшити на 5 см?
191. Точки  $K$ ,  $L$  і  $M$  лежать на одній прямій.  $KL = 7$  см,  $LM = 3$  см. Знайдіть  $KM$ . Розгляньте всі можливі випадки.
192. Прямі  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $O$ ,  $OM$  — бісектриса кута  $AOC$ . Знайдіть міри кутів  $MOB$  і  $MOD$ , якщо  $\angle COB = 70^\circ$ .
193. Один із двох кутів, утворених при перетині двох прямих, на  $90^\circ$  більший за інший. У скільки разів він більший за інший кут?

## § 7. ВЛАСТИВОСТІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ

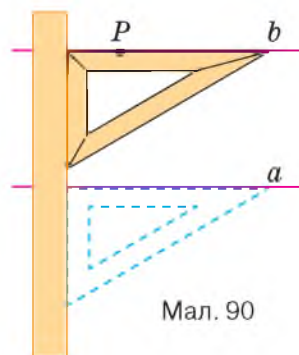
### ЗАДАЧА

Дано пряму  $a$  і точку  $P$ , що не належить цій прямій. Проведіть через точку  $P$  пряму, паралельну прямій  $a$ .

✎ За допомогою лінійки і косинця побудову можна виконати, як показано на малюнку 90. ▲

Чи можна через точку  $P$  провести дві різні прямі, паралельні прямій  $a$ ?

Геометри здавна вважали істинним таке твердження:



Мал. 90

Через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Давньогрецький геометр Евклід це твердження прийняв без доведення. Його назвали *аксіомою Евкліда*, тому що всі твердження, які приймають без доведення, називають *аксіомами*. (Детальніше про аксіоми і теореми — у наступному параграфі.)

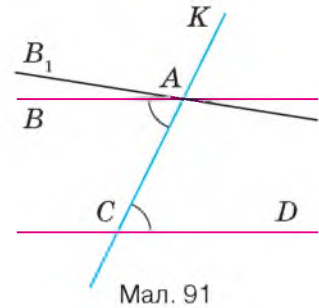
Не всі вчені аксіому Евкліда вважають правильною. Геометрію, у якій визнається правильною аксіома Евкліда, називають *евклідовою геометрією*. Ви вивчаєте евклідову геометрію.

**Теорема 6** (обернена до теореми 3).

**Якщо прями паралельні, то внутрішні різносторонні кути, утворені ними з січною, — рівні.**

**Доведення.** Нехай прями  $AB$  і  $CD$  — паралельні, а  $KC$  — їх січна, яка проходить через точку  $A$  (мал. 91). Доведемо, що  $\angle CAB = \angle ACD$ .

Припустимо, що  $\angle CAB \neq \angle ACD$ . Проведемо пряму  $AB_1$  так, щоб виконувалась рівність  $\angle CAB_1 = \angle ACD$ . За ознакою паралельності прямих  $AB_1 \parallel CD$ , а за умовою  $AB \parallel CD$ . Виходить, що через точку  $A$  проведено дві різні прями, паралельні прямій  $CD$ . Це суперечить аксіомі Евкліда. Отже, зроблене вище припущення призводить до суперечності. Тому  $\angle CAB = \angle ACD$ . ▲



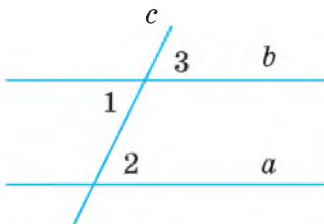
Мал. 91

**Наслідок 1** Якщо прями паралельні, то відповідні кути, утворені цими прямими з січною, — рівні.

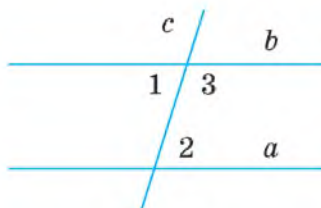
**Доведення.** Якщо  $a \parallel b$ , то за теоремою 6:  $\angle 1 = \angle 2$  (мал. 92, а).  $\angle 1$  і  $\angle 3$  — вертикальні, тому  $\angle 1 = \angle 3$ . Оскільки  $\angle 2 = \angle 1$ , а  $\angle 1 = \angle 3$ , то  $\angle 2 = \angle 3$ . ▲

**Наслідок 2** Якщо прями паралельні, то сума внутрішніх односторонніх кутів, утворених цими прямими з січною, дорівнює  $180^\circ$ .

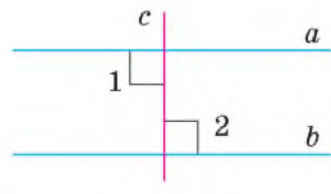
Доведіть самостійно, використовуючи малюнок 92, б.



Мал. 92, а



Мал. 92, б



Мал. 92, в

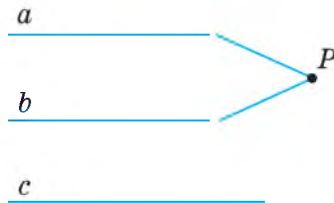
**Наслідок 3** Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до іншої прямої.

Справді, якщо  $c \perp a$  і  $a \parallel b$ , то  $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$ , тобто  $c \perp b$  (мал. 92, в).

**Теорема 7** Дві прямі, паралельні третій, паралельні одна одній.

**Доведення.** Нехай кожна з прямих  $a$  і  $b$  паралельна прямій  $c$ . Доведемо, що  $a \parallel b$ .

Припустимо, що прямі  $a$  і  $b$  не паралельні (мал. 93), а перетинаються в деякій точці  $P$ . Виходить, що через точку  $P$  проходять дві різні прямі  $a$  і  $b$ , паралельні прямій  $c$ . Це суперечить аксіомі Евкліда. Отже, прямі  $a$  і  $b$  не можуть перетинатися. Тоді вони паралельні. ▲



Мал. 93

**Зверніть увагу!** Доведення теореми правильне і для випадку, коли пряма  $c$  лежить між прямими  $a$  і  $b$ .

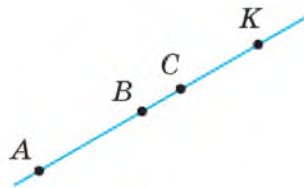
## Для допитливих

**1.** Останню теорему називають теоремою про *транзитивність паралельності прямих* (лат. *transitivus* — перехідний), бо вона стверджує, що паралельність двох пар паралельних прямих переходить на третю пару:

якщо  $a \parallel b$  і  $b \parallel c$ , то  $a \parallel c$ .

Щоб це твердження виконувалося завжди, домовилися вважати, що кожна пряма паралельна сама собі, тобто  $a \parallel a$ . Адже якщо  $a \parallel b$  і  $b \parallel a$ , то  $a \parallel a$ .

**2.** Відрізки однієї прямої також вважають паралельними. Наприклад, якщо  $A, B, C, K$  — точки однієї прямої, то кожний з відрізків  $AB, AC, AK, BC, BK, CK$  паралельний будь-якому з них (мал. 94). У доцільності такої домовленості ви переконаєтеся згодом, вивчаючи паралельне перенесення, паралельне проектування тощо. А в цьому класі основна увага звертатиметься на паралельність відрізків і променів, що не лежать на одній прямій.



Мал. 94

**3.** Є геометрії, у яких аксіома Евкліда не вважається правильною. Їх називають *неевклідовими геометріями*. Такою, наприклад, є геометрія Лобачевського (див. с. 179).

Подане на с. 51 формулювання аксіоми Евкліда насправді належить грецькому математику Проклу Діадоху (V ст. н.е.), який сформулював її майже на 1000 років пізніше. Евклід же формулював цю аксіому інакше: «Якщо пряма, що падає на дві прямі, утворює внутрішні і по одну сторону кути, менші від двох прямих, то необмежено продовжені ці прямі зустрінуться з тієї сторони, де кути менші від двох прямих».

## Запитання і завдання для самоконтролю

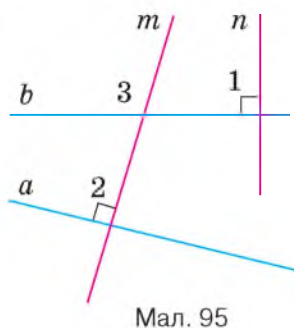
1. Сформулюйте аксіому Евкліда про паралельність прямих.
2. Сформулюйте і доведіть теорему про внутрішні рівносторонні кути при паралельних прямих та січній.
3. Сформулюйте і доведіть властивості відповідних і внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих і січних.
4. Сформулюйте і доведіть теорему про дві прямі, паралельні третій.

### Виконаємо разом

1. Доведіть, що прямі, перпендикулярні до непаралельних прямих, перетинаються.

▼ Нехай прямі  $a$  і  $b$  перетинаються, а прямі  $m$  і  $n$  перпендикулярні до них:  $m \perp a$ ,  $n \perp b$  (мал. 95).

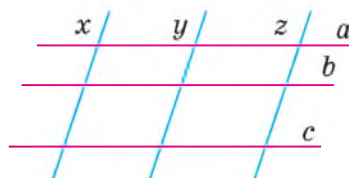
Тоді  $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$ . Припустимо, що  $m \parallel n$ , тобто  $\angle 1 = \angle 3$ . Тоді й  $\angle 2 = \angle 3$ , а звідси випливає, що  $a \parallel b$ . Це суперечить умові задачі. Отже, прямі  $m$  і  $n$  не можуть бути паралельними. Тоді вони перетинаються. ▲



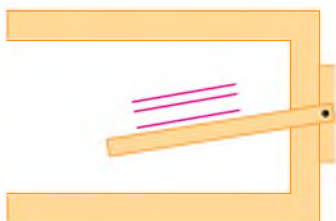
## ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

### Виконайте усно

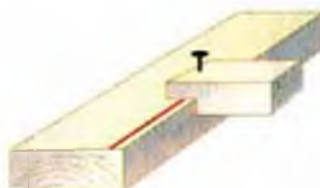
194. Скільки пар паралельних прямих є на малюнку 96? А скільки пар непаралельних прямих?
195. Кут між прямими  $a$  і  $x$  дорівнює  $70^\circ$  (мал. 96). Знайдіть кути між усіма парами прямих, що є на малюнку.
196. Поясніть, як можна проводити паралельні прямі, користуючись рейспиною (мал. 97).
197. На малюнку 98 зображено саморобний рейсмус. Як таким рейсмусом можна проводити на бруску прямі, паралельні його ребрам?



Мал. 96



Мал. 97

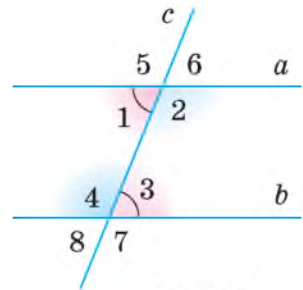


Мал. 98



## А

198. Міра одного з кутів, утворених двома паралельними прямими з їх січною, дорівнює  $35^\circ$ . Знайдіть міри інших кутів.
199. На стороні кута  $ABC$  взято точку  $A$ . Через неї проведено пряму, паралельну  $BC$ . Знайдіть міри кутів при вершині  $A$ , якщо  $\angle ABC = 50^\circ$ .
200. У прямокутнику  $ABCD$   $\angle BAC$  на  $20^\circ$  більший за  $\angle DAC$ . Знайдіть  $\angle ACB$  і  $\angle ACD$ .
201. Знайдіть міри всіх кутів, зображених на малюнку 99, якщо  $a \parallel b$  і:
- $\angle 1 = 60^\circ$ ;
  - $\angle 5 + \angle 7 = 250^\circ$ ;
  - $\angle 2 - \angle 1 = 50^\circ$ ;
  - $\angle 4 - \angle 6 = 20^\circ$ .



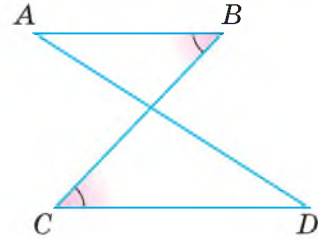
Мал. 99

202. Доведіть, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й іншу пряму.
203. Прямі  $a$  і  $b$  не паралельні прямій  $c$ . Чи впливає з цього, що прямі  $a$  і  $b$  не паралельні?
204. Доведіть, що бісектриси двох відповідних кутів при паралельних прямих паралельні.
205. Доведіть, що коли одна січна з двома прямими утворює рівні відповідні кути, то й кожна інша січна з цими прямими утворює рівні відповідні кути.
206. Кут між однією з двох паралельних прямих і їх січною дорівнює  $80^\circ$ . Під яким кутом бісектриса цього кута перетинає іншу пряму?
207. На сторонах  $AB$  і  $BC$  трикутника  $ABC$  взято точки  $K$  і  $P$  такі, що  $KP \parallel AC$ . Знайдіть кути чотирикутника  $AKPC$ , якщо  $\angle BKP = 60^\circ$ ,  $\angle BPK = 80^\circ$ .

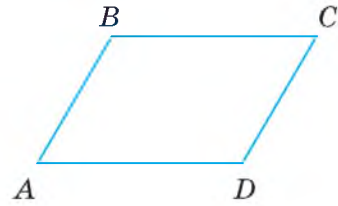
## Б

208. Якщо прямі з січною утворюють нерівні відповідні кути, то вони перетинаються. Доведіть це.
209. Промені  $AB$ ,  $AC$  і  $KP$  різні і такі, що  $AB \parallel KP$ ,  $AC \parallel KP$ . Знайдіть міру кута  $BAC$ .
210. Користуючись малюнком 99, на якому  $\angle 1 = \angle 3$ , обчисліть міри кутів 3 і 4, якщо:
- $\angle 4 - \angle 1 = 50^\circ$ ;
  - $\angle 4$  в 3 рази більший за  $\angle 6$ .

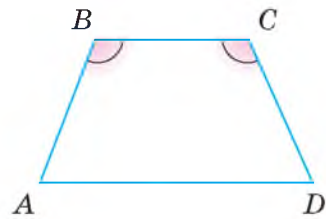
211. Сторони  $AD$  і  $BC$  замкненої ламаної  $ABCD$  перетинаються і  $\angle B = \angle C$  (мал. 100). Доведіть, що  $\angle A = \angle D$ .
212. Кожна сторона чотирикутника  $ABCD$  паралельна протилежній стороні (мал. 101). Доведіть, що:
- $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ;
  - $\angle B + \angle C = 180^\circ$ ;
  - $\angle A = \angle C$ ;
  - $\angle B = \angle D$ .
213. У чотирикутнику  $ABCD$   $BC \parallel AD$  і  $\angle B = \angle C$  (мал. 102). Доведіть, що:
- $\angle A = \angle D$ ;
  - $\angle A + \angle C = 180^\circ$ .
214. Через точку, яка не лежить на прямій  $a$ , проведено три прямі. Доведіть, що принаймні дві з них перетинають пряму  $a$ .
215. Доведіть, що два кути з відповідно паралельними сторонами рівні або сума їх мір дорівнює  $180^\circ$ .
216. На малюнку 103  $\angle 1 = 70^\circ$ ,  $\angle 2 = 50^\circ$  і  $AB \parallel CD$ . Знайдіть міри кутів 3, 4 і 5.
217. На малюнку 104  $\angle ABC = 50^\circ$ ,  $\angle CDE = 36^\circ$ ,  $AB \parallel DE$ . Знайдіть  $\angle BCD$ .
218. Одна насічка напилка утворює з його ребром кут  $65^\circ$ , а інша —  $74^\circ$  (мал. 105). Знайдіть міру гострого кута між двома різними насічками.



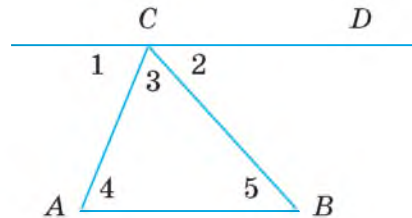
Мал. 100



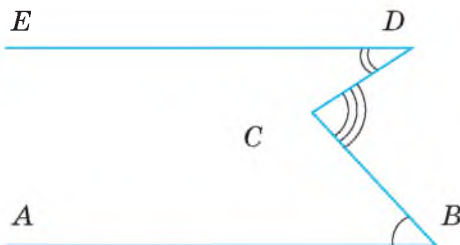
Мал. 101



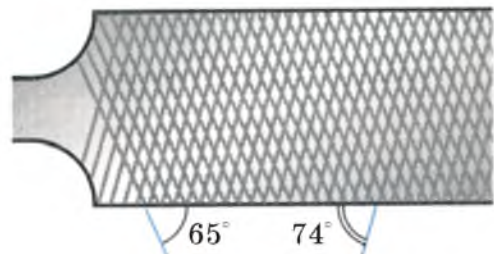
Мал. 102



Мал. 103



Мал. 104



Мал. 105

**Практичне завдання**

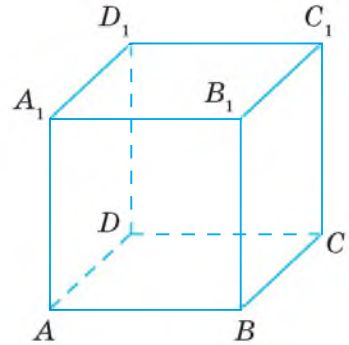
219. Виміряйте необхідні кути (мал. 106) і встановіть, чи є паралельними червоні та сині лінії, які визначають елементи схеми для вишивання українського рушника.



Мал. 106

**ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ**

220. Знайдіть діаметр кола, якщо він довший за радіус:  
а) на 3 см; б) на 3,5 м.
221. Чому дорівнює довжина кола, діаметр якого:  
а) 10 см; б) 0,1 м?
222. Скільки спільних точок можуть мати:  
а) пряма і коло;  
б) пряма і круг;  
в) коло і коло?
223. Перемалюйте в зошит фігуру з малюнка 107. Як називають таку фігуру? Назвіть її вершини, ребра, грані.
224. Скільки різних пар паралельних ребер має куб?



Мал. 107

**§ 8. ТЕОРЕМИ І АКсіОМИ**

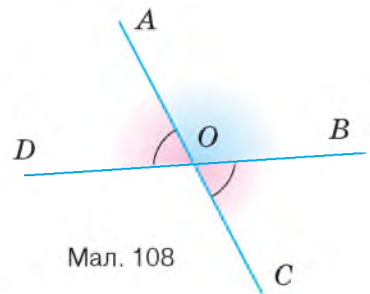
Ви вже маєте уявлення про теореми. *Теорема* — це твердження, в істинності якого переконуються за допомогою логічних міркувань, доведень.

Звичайно теорема містить *умову* (те, що дано) і *висновок* (що вимагається довести). Щоб виокремити умову і висновок теорема, її зручно подати у формі «Якщо..., то...». Наприклад: «Якщо кути вертикальні, то вони рівні». Тут слова перед комою виражають умову теореми, а після коми — висновок.

Часто умову теореми записують після слова «дано», а висновок — після слова «довести». Наприклад, теорему про вертикальні кути (мал. 108) можна оформити так.

Дано:  $\angle AOD$ ,  $\angle BOC$  — вертикальні кути.

Довести:  $\angle AOD = \angle BOC$ .



Мал. 108

Д о в е д е н н я.

$\angle AOD = 180^\circ - \angle AOB$  ( $\angle AOD$  і  $\angle AOB$  — суміжні),

$\angle BOC = 180^\circ - \angle AOB$  ( $\angle BOC$  і  $\angle AOB$  — суміжні).

Отже,  $\angle AOD = \angle BOC$ .

Помінявши умову і висновок теореми місцями, одержимо нове твердження (істинне або хибне). Якщо одержане таким способом твердження істинне, його називають *теоремою, оберненою до даної*. Наведемо приклад.

1. «Якщо кути вертикальні, то вони — рівні» — дана теорема. «Якщо кути рівні, то вони — вертикальні» — обернене твердження. Оскільки це твердження хибне, то воно не є теоремою.

2. «Якщо відповідні кути рівні, то прямі — паралельні» — дана теорема. «Якщо прямі паралельні, то відповідні кути — рівні» — теорема, обернена до даної.

Найважливіші теореми, у яких подано критерії чого-небудь, називають *ознаками*.

Доводячи теорему, показують, що вона впливає з інших істинних тверджень. Однак на початку вивчення геометрії ще ніяких «інших істинних тверджень» немає. Тому кілька перших тверджень зазвичай приймають без доведень. Їх називають *аксіомами*.

Деякі аксіоми вам уже відомі. Сформулюємо їх ще раз.

- Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що їй не належать.
- Через будь-які дві різні точки можна провести пряму, і тільки одну.
- Із трьох точок прямої одна, і тільки одна, лежить між двома іншими.
- Кожний відрізок має певну довжину.
- Кожний кут має певну міру.
- Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Від теорем і аксіом слід відрізняти *означення*, у яких розкривається зміст поняття. Наприклад: «Відрізком називається частина прямої, обмежена двома її точками» — означення відрізка; «Гострим кутом називається кут, менший від прямого» — означення гострого кута.

В означеннях, аксіомах і теоремах — основний зміст геометрії, їх треба знати, але формулювати (правильно!) можна і своїми словами. Наприклад, означення відрізка можна формулювати й так: «Відрізок — це частина прямої, обмежена двома її точками» або так: «Частину прямої, обмежену двома її точками, називають відрізком».

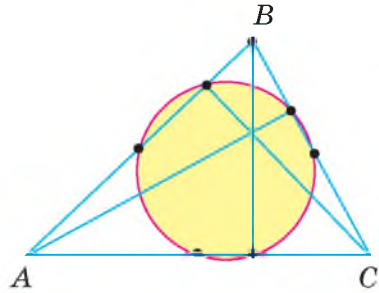
## Для допитливих

1. Слово *аксіома* — грецького походження. Спочатку це слово означало: повага, авторитет, незаперечність. Згодом словом «аксіома» стали називати твердження, яке приймається без обґрунтування.

2. Слово *теорема* також грецького походження. Спочатку теоремою називали видовище, театральну виставу. Першим геометрам доведені ними теореми здавалися досить несподіваними, дивними, мов цікаві видовища. І справді дивно: з небагатьох примітивних тверджень, які приймаються без доведень, шляхом самих міркувань, людина може отримати мільйони неочевидних наслідків. Навіть таких, які в природі не можна спостерігати. І таких, про існування яких не здогадувався жоден мислитель.

3. Щоб і ви зрозуміли, яке задоволення відчували перші геометри, відкриваючи і доводячи все нові й нові властивості геометричних фігур за допомогою самих лише міркувань, спробуйте відповісти на одне з таких запитань.

Подивіться на малюнок 109. На ньому виділено 6 точок: середини сторін трикутника  $ABC$  і основи його висот. Здається, усі ці точки лежать на одному колі. Чи справді це так? Чи в кожному трикутнику? Хто першим виявив подібні закономірності й обґрунтував їх, той відчував велике задоволення, немов мандрівник, який першим прийшов туди, де жодна інша людина ще не була, або спортсмен, який побив світовий рекорд.



Мал. 109

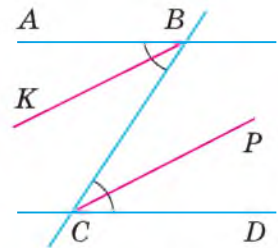
## Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що таке теорема? Наведіть приклади теорем.
2. Що таке аксіома? Наведіть приклади аксіом.
3. Що таке означення? Наведіть приклади означень.
4. Яке твердження називають теоремою, оберненою до даної?
5. Що таке ознака?

## Виконаємо разом

1. Бісектриси внутрішніх різносторонніх кутів, утворених січною з двома паралельними прямими, паралельні одна одній. Доведіть. Сформулюйте обернене твердження.

✦ Нехай  $BC$  — січна прямих  $AB$  і  $CD$ , кути  $ABC$  і  $BCD$  — внутрішні різносторонні, а  $BK$  і  $CP$  — їх бісектриси (мал. 110). Покажемо, що коли  $AB \parallel CD$ , то  $BK \parallel CP$ .



Мал. 110



Якщо  $AB \parallel CD$ , то  $\angle ABC = \angle BCD$  (як внутрішні різносторонні при паралельних прямих). Половини рівних кутів — рівні, тому  $\angle KBC = \angle BCP$ . Ці кути — внутрішні різносторонні для прямих  $KB$  і  $CP$  та січної  $BC$ . Оскільки ці кути рівні, то прямі  $KB$  і  $CP$  — паралельні.

А це й треба було довести.

Обернене твердження: якщо бісектриси внутрішніх різносторонніх кутів, утворених двома прямими з їх січною, — паралельні, то паралельні й дані прямі. ▲

2. Два промені називають *співнапрямленими*, якщо один із них є частиною другого або якщо вони паралельні й розміщені по один бік від прямої, що проходить через їх початки. Наведіть приклади.

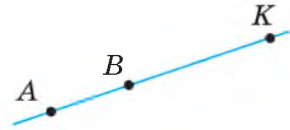
▼ Наприклад, промені  $AK$  і  $BK$  (мал. 111), а також промені  $AK$  і  $BT$  (мал. 112). ▲

3. Доведіть, що кути із співнапрямленими сторонами рівні.

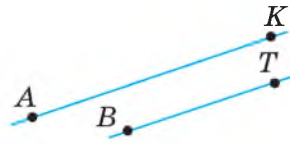
▼ Доведемо, що коли промені  $BA$  і  $PK$ ,  $BC$  і  $PT$  — співнапрямлені, то кути 1 і 2 — рівні.

Якщо дані кути розміщені, як показано на малюнку 113, то  $\angle 1 = \angle 3$  і  $\angle 3 = \angle 2$ . Отже,  $\angle 1 = \angle 2$ .

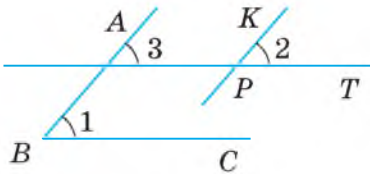
Якщо дані кути розміщені, як показано на малюнку 114, то промінь  $PT$  становить частину променя  $BC$ . У цьому випадку  $\angle 1 = \angle 2$  як відповідні кути при паралельних прямих  $BA$  і  $PK$ . ▲



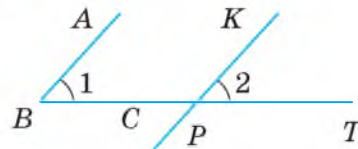
Мал. 111



Мал. 112



Мал. 113



Мал. 114

## ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

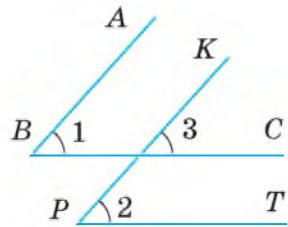
### Виконайте усно

225. Сформулюйте означення: а) вертикальних кутів; б) суміжних кутів.
226. Сформулюйте аксіоми про розміщення точок на прямій.
227. Сформулюйте аксіоми про вимірювання відрізків.
228. Сформулюйте аксіому Евкліда про паралельність прямих.
229. Чи через кожні три точки можна провести пряму? Чи існують три точки, через які можна провести пряму?

230. Чи існують 4 точки, через які можна провести пряму?
231. Сформулюйте ознаку подільності натуральних чисел на 3. Як її можна сформулювати інакше?
232. Яке з тверджень правильне:
- «Якщо кожне з двох натуральних чисел ділиться на 10, то і їх сума ділиться на 10»;
  - «Якщо сума двох натуральних чисел ділиться на 10, то кожне з них ділиться на 10»?

## А

233. Сформулюйте теорему про суміжні кути. Подайте її у формі «Якщо..., то...». Зазначте її умову і висновок.
234. Сформулюйте теорему про дві прямі, паралельні третій. Запишіть її за допомогою математичних символів.
235. Які з даних тверджень — істинні:
- «Якщо кути рівні, то вони вертикальні»;
  - «Якщо кути не вертикальні, то вони не рівні»;
  - «Якщо кути не рівні, то вони не вертикальні»?
236. Сформулюйте твердження, обернене до теореми 1. Чи можна вважати його теоремою? Чому?
237. Сформулюйте твердження, обернене до теореми 5. Чи є воно теоремою?
238. Дивлячись на малюнок 115, учень міркує: «Якщо  $AB \parallel KP$  і  $BC \parallel PT$ , то  $\angle 1 = \angle 3 = \angle 2$ . Отже, кути з відповідно паралельними сторонами — рівні».
- Чи правильно він міркує? Розгляньте інші можливі випадки.



Мал. 115

239. Чи можна вважати правильними такі означення:
- «Бісектрисою кута називають пряму, яка ділить цей кут навпіл»;
  - «Бісектрисою кута називають промінь, який ділить цей кут на рівні частини»?
240. Прочитайте три перші абзаци § 3 «Кути і їх міри». Чи є в них означення? Сформулюйте одне з них.

## Б

241. Сформулюйте означення паралельних прямих. Чи можна слова «на площині» опустити? Чому?
242. Яке з тверджень правильне:
- «Якщо кожне з трьох натуральних чисел ділиться на 5, то їх сума також ділиться на 5»;

б) «Якщо сума трьох натуральних чисел ділиться на 5, то кожне з них ділиться на 5»?

**243.** Доведіть, що кут між бісектрисами двох вертикальних кутів— розгорнутий. Сформулюйте і доведіть аналогічне твердження про бісектриси двох суміжних кутів.

**244.** Сформулюйте словами і доведіть твердження:

а) якщо  $a \parallel b$  і  $b \parallel c$ , то  $a \parallel c$ ;

б) якщо  $a \perp b$  і  $b \perp c$ , то  $a \parallel c$ .

Чи правильні ці твердження, якщо прямі  $a$ ,  $b$  і  $c$  не лежать в одній площині?

**245.** Доведіть, що:

а) якщо кут  $A$  дорівнює куту  $B$ , а кут  $B$  дорівнює куту  $C$ , то кути  $A$  і  $C$  дорівнюють один одному;

б) якщо відрізок  $AB$  дорівнює відрізку  $KP$ , а  $KP$  дорівнює відрізку  $MT$ , то відрізок  $AB$  дорівнює відрізку  $MT$ .

**246.** Чи правильні твердження:

а) «Якщо кут  $A$  суміжний з кутом  $B$ , а кут  $B$  суміжний з кутом  $C$ , то кути  $A$  і  $C$  — суміжні»;

б) «Якщо кут  $A$  вертикальний з кутом  $B$ , а кут  $B$  вертикальний з кутом  $C$ , то кути  $A$  і  $C$  — також вертикальні»;

в) «Якщо прямі  $a$  і  $c$  лежать в одній площині і прямі  $c$  і  $n$  лежать в одній площині, то прямі  $a$  і  $n$  також лежать в одній площині»?

**247.** Паралельні залізничні рейки, промені сонця та багато інших моделей прямих на фотографіях і картинах часто зображають у вигляді непаралельних прямих (мал. 116). Наведіть приклади зображень, на яких непаралельні прямі мають вигляд паралельних.

**248.** Доведіть, що січна, перетинаючи паралельні прямі, утворює з ними:

а) рівні зовнішні різносторонні кути;

б) зовнішні односторонні кути, які в сумі становлять  $180^\circ$ .

**249.** Доведіть, що кути з відповідно перпендикулярними сторонами рівні або в сумі становлять  $180^\circ$ .

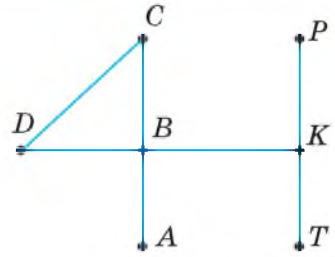


Мал. 116

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**250.** Скільки існує на прямій точок, які лежать між даними її точками  $A$  і  $B$ ?

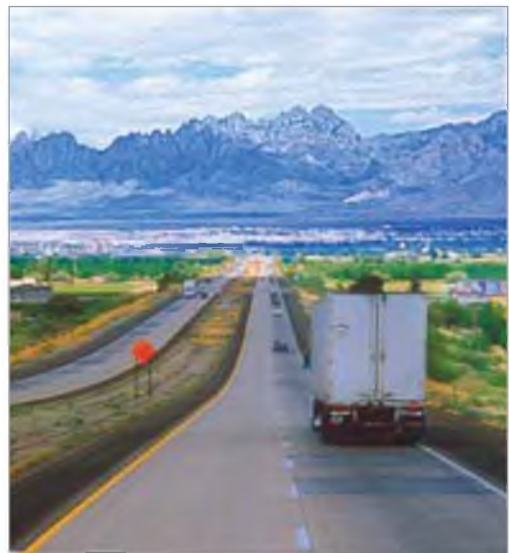
- 251. На які частини пряму ділять дві її точки?
- 252. Скільки різних відрізків зображено на малюнку 117? Назвіть їх.
- 253. Скількома різними ламаними можна сполучити дві дані точки  $K$  і  $P$ ? А скількома відрізками? Скількома дугами кіл?
- 254. Дюйм — це 2,5 см. Скільки квадратних сантиметрів має квадратний дюйм?



Мал. 117



Геометрія навколо нас



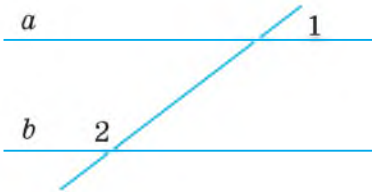
## ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

А

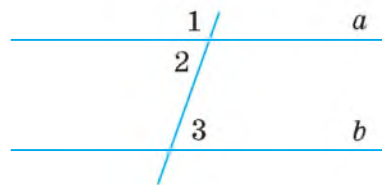
Б

1

$\angle 1 = 50^\circ, \angle 2 = 130^\circ.$   
Довести:  $a \parallel b.$

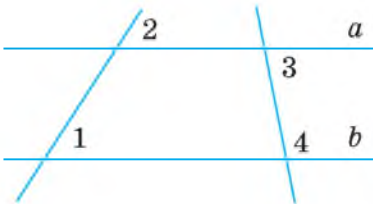


$\angle 1 : \angle 2 = 3 : 2, \angle 3 = 72^\circ.$   
Довести:  $a \parallel b.$

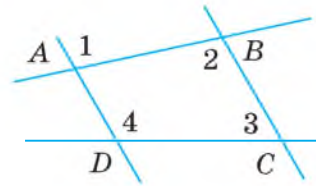


2

$\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = 80^\circ.$   
Довести:  $a \parallel b.$

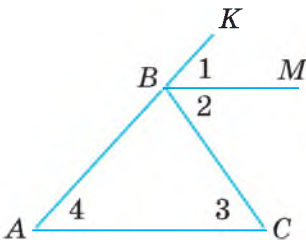


$\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ.$   
Довести:  $\angle 1 = \angle 2.$

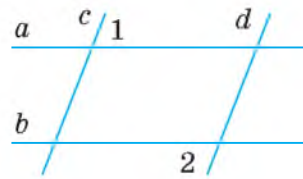


3

$\angle 2 = \angle 3.$   
Довести:  $\angle 1 = \angle 4.$

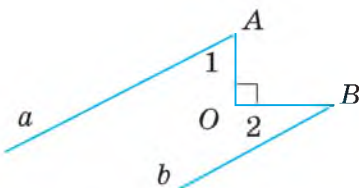


$a \parallel b, \angle 1 = \angle 2.$   
Довести:  $c \parallel d.$

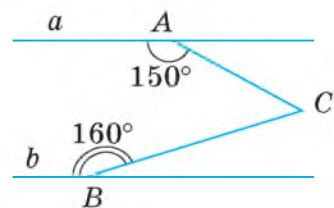


4

$a \parallel b, \angle 1 = 60^\circ.$   
Довести:  $\angle 2 = 90^\circ.$



$a \parallel b.$   
Довести:  $\angle C = 90^\circ.$





**Самостійна робота 2****Варіант 1**

- 1°. Відрізки  $AB$  і  $KP$  перетинаються у внутрішній точці  $O$  так, що  $\angle AOK = 50^\circ$ . Знайдіть міри кутів  $AOP$ ,  $POP$  і  $POK$ .
- 2°. Один із двох суміжних кутів більший за інший на  $18^\circ$ . Знайдіть ці кути.
- 3°. Через кінці відрізка  $AB$  з одного боку від прямої  $AB$  проведіть промені  $AK$  і  $BC$  так, щоб  $\angle KAB = 107^\circ$ , а  $\angle ABC = 73^\circ$ . Чи паралельні ці промені? Чому?

**Варіант 2**

- 1°. Відрізки  $MN$  і  $KT$  перетинаються у внутрішній точці  $X$  так, що  $\angle MXK = 65^\circ$ . Знайдіть міри кутів  $MXT$ ,  $TXN$  і  $KXN$ .
- 2°. Знайдіть міри двох суміжних кутів, якщо один із них утричі більший за інший.
- 3°. Через кінці відрізка  $AB$  з одного боку від прямої  $AB$  проведіть промені  $AM$  і  $BC$  так, щоб  $\angle MAB = 102^\circ$ , а  $\angle ABC = 77^\circ$ . Чи паралельні ці промені? Чому?

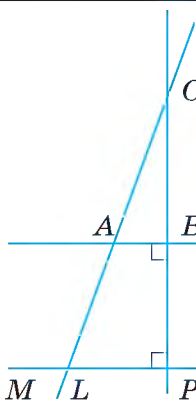
**Варіант 3**

- 1°. Відрізки  $AC$  і  $MP$  перетинаються у внутрішній точці  $O$  так, що  $\angle MOC = 48^\circ$ . Знайдіть міри кутів  $AOP$ ,  $AOM$  і  $POC$ .
- 2°. Знайдіть міри двох суміжних кутів, якщо один із них на  $26^\circ$  більший за інший.
- 3°. Через кінці відрізка  $KP$  з одного боку від прямої  $KP$  проведіть промені  $KA$  і  $PB$  так, щоб  $\angle AKP = 97^\circ$ , а  $\angle KPB = 83^\circ$ . Чи паралельні ці промені? Чому?

**Варіант 4**

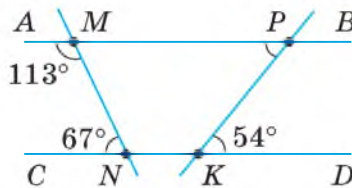
- 1°. Відрізки  $AB$  і  $CD$  перетинаються у внутрішній точці  $M$  так, що  $\angle AMC = 35^\circ$ . Знайдіть міри кутів  $AMD$ ,  $CMB$  і  $BMD$ .
- 2°. Знайдіть міри двох суміжних кутів, якщо один із них на  $15^\circ$  менший від іншого.
- 3°. Через кінці відрізка  $AB$  з одного боку від прямої  $AB$  проведіть промені  $AK$  і  $BM$  так, щоб  $\angle KAB = 58^\circ$ , а  $\angle ABM = 123^\circ$ . Чи паралельні ці промені? Чому?

Тестові завдання **2**

1.	Яку міру має кут, суміжний із кутом $100^\circ$ ?	а) $100^\circ$ ; б) $80^\circ$ ; в) $8^\circ$ ; г) $50^\circ$ .
2.	Яким є кут, суміжний із тупим кутом?	а) тупим; б) прямим; в) гострим; г) розгорнутим.
3.	$\angle AOP$ і $\angle BOC$ — вертикальні кути. Який знак слід поставити замість * в записі: $\angle AOP * \angle BOC$ ?	а) $<$ ; б) $=$ ; в) $>$ ; г) $\geq$ .
4.	Сума трьох кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює $280^\circ$ . Знайдіть міру четвертого кута.	а) $100^\circ$ ; б) $80^\circ$ ; в) $90^\circ$ ; г) $70^\circ$ .
<b>Для виконання завдань 5–10 скористайтеся малюнком 118.</b>		
5.	Який знак слід поставити замість * в записі: $CB * LP$ ?	а) $\parallel$ ; б) $=$ ; в) $\in$ ; г) $\perp$ .
6.	Які з прямих паралельні?	 <p style="text-align: center;">Мал. 118</p>
7.	Яким є кут $\angle ABC$ ?	
8.	$\angle ALM = 130^\circ$ . Знайдіть $\angle LAB$ .	
9.	Знайдіть $\angle CAB$ , якщо $\angle MLA = 145^\circ$ .	
10.	Відстань від точки $C$ до прямої $MP$ дорівнює 12 см. Знайдіть відстань від точки $C$ до прямої $AB$ , якщо $CB = BP$ .	а) 12 см; б) 4 см; в) 6 см; г) 24 см.

## ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

- 1°. Точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  лежать на одній прямій,  $AB = 7,3$  см,  $BC = 3,7$  см. Знайдіть довжину відрізка  $AC$ . Розгляньте два випадки.
- 2°. Внутрішній промінь  $OK$  кута  $AOB$  розбиває його на кути  $AOK$  і  $KOB$ . Знайдіть міру кута:
  - а)  $AOB$ , якщо  $\angle AOK = 30^\circ$ ,  $\angle KOB = 40^\circ$ ;
  - б)  $KOB$ , якщо  $\angle AOB = 79^\circ$ ,  $\angle KOA = 53^\circ$ ;
  - в)  $KOA$ , якщо він на  $20^\circ$  менший від кута  $KOB$  і  $\angle AOB = 80^\circ$ .
- 3°. Накресліть  $\angle ABC = 120^\circ$ . Проведіть його бісектрису  $BM$  і бісектрису  $BK$  кута  $MBC$ . Знайдіть міри кутів  $KBC$  і  $ABK$ .
- 4°. Знайдіть міри чотирьох кутів, утворених при перетині двох прямих, якщо один із них дорівнює  $45^\circ$ .
- 5°. Знайдіть міри суміжних кутів, якщо один із них:
  - а) на  $25^\circ$  більший за інший;
  - б) у 3 рази менший від іншого.
- 6°. За допомогою малюнка 119 установіть:
  - а) чи паралельні прямі  $AB$  і  $CD$ ;
  - б) міру кута  $KPM$ .



Мал. 119

- 7°. Дві паралельні прямі перетинає третя пряма так, що сума двох із восьми утворених кутів дорівнює  $240^\circ$ . Знайдіть міри всіх утворених кутів.
- 8°. Відрізки  $AB$  і  $KP$  перетинаються в точці  $O$ . Доведіть, що якщо  $\angle AOK = \angle OPB$ , то  $\angle KAO = \angle OBP$ .
- 9°. Прямі  $AB$  і  $KP$  перетинаються в точці  $O$ .  $OM$  — бісектриса кута  $AOP$ . Знайдіть міру кута  $KOM$ , якщо  $\angle AOK - \angle AOM = 36^\circ$ .
- 10°. Доведіть, що бісектриси внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих — перпендикулярні.

## Запитання і завдання для самоконтролю

1. Які кути називають суміжними?
2. Сформулюйте і доведіть властивість суміжних кутів.
3. Які кути називають вертикальними?
4. Сформулюйте і доведіть властивість вертикальних кутів.
5. Що таке кут між прямими?
6. Сформулюйте означення перпендикулярних прямих.
7. Які відрізки називають перпендикулярними?
8. Які дві прямі називають паралельними?
9. Які відрізки називають паралельними?
10. За допомогою яких креслярських інструментів можна провести пряму, перпендикулярну до даної прямої? Як це роблять?
11. Як можна провести пряму, паралельну даній прямій?
12. Сформулюйте означення паралельних прямих.
13. Що таке січна двох прямих?
14. Які кути називають внутрішніми різносторонніми?  
А внутрішніми односторонніми? Покажіть на малюнку.
15. Які кути називають відповідними? Покажіть на малюнку.
16. Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності прямих.
17. Сформулюйте аксіому Евкліда про паралельність прямих.
18. Що ви знаєте про Евкліда, про його «Основи»?
19. Сформулюйте і доведіть теорему про внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих.
20. Сформулюйте і доведіть властивості відповідних і внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих і січній.
21. Сформулюйте і доведіть теорему про дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої.
22. Що означає слово *транзитивний*? Сформулюйте теорему про транзитивність паралельності прямих.
23. Що таке теорема? Наведіть приклади теорем.
24. Що таке аксіома? Наведіть приклади аксіом.
25. Що таке означення? Наведіть приклади означень.
26. Яке твердження називають теоремою, оберненою до даної?
27. Що таке ознака?

## ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 2

Два кути, на які розгорнутий кут розбивається його внутрішнім променем, називають *суміжними*. Сума мір двох суміжних кутів дорівнює  $180^\circ$ .

Два кути називають *вертикальними*, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого. Вертикальні кути — рівні.

Якщо дві прямі перетинаються, вони утворюють чотири кути (дві пари вертикальних кутів). Менший із них — кут між даними прямими.

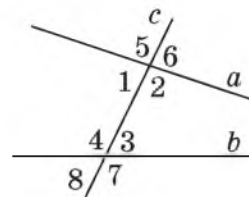
Дві прямі називають *перпендикулярними*, якщо вони перетинаються під прямим кутом. Якщо прямі  $a$  і  $b$  перпендикулярні, пишуть:  $a \perp b$ . Відрізки чи промені називають перпендикулярними, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.

Дві прямі на площині називають *паралельними*, якщо вони не перетинаються. Якщо прямі  $a$  і  $b$  паралельні, пишуть:  $a \parallel b$ . Два відрізки або промені називають паралельними, якщо вони лежать на паралельних прямих.

Через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Пряму, яка перетинає дві інші прямі, називають їх *січною*. З двома даними прямими вона утворює 8 кутів, деякі пари яких мають окремі назви:

- 1 і 3, 2 і 4 — внутрішні різносторонні;
- 1 і 4, 2 і 3 — внутрішні односторонні;
- 1 і 8, 2 і 7, 3 і 6, 4 і 5 — відповідні;
- 5 і 7, 6 і 8 — зовнішні різносторонні;
- 5 і 8, 6 і 7 — зовнішні односторонні.



### Ознака паралельності прямих

Дві прямі паралельні, якщо з січною вони утворюють рівні внутрішні різносторонні кути, або рівні відповідні кути, або такі внутрішні односторонні кути, сума яких дорівнює  $180^\circ$ .

### Властивості паралельних прямих

- Січна з двома паралельними прямими утворює рівні внутрішні різносторонні кути, рівні відповідні кути, такі внутрішні односторонні кути, сума яких дорівнює  $180^\circ$ .
- Дві прямі, паралельні третій, паралельні одна одній.
- Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до іншої.

Дві прямі, перпендикулярні до третьої, — паралельні.



## ЗМІСТ

Від авторів . . . . . 3



## РОЗДІЛ 1. НАЙПРОСТІШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

§ 1. Точки і прямі . . . . .	6
§ 2. Відрізки і їх довжини . . . . .	12
§ 3. Кути і їх міри . . . . .	17
<i>Задачі за готовими малюнками</i> . . . . .	24
<i>Самостійна робота 1</i> . . . . .	26
<i>Тестові завдання 1</i> . . . . .	27
<i>Запитання і завдання для самоконтролю</i> . . . . .	28
<i>Головне в розділі 1</i> . . . . .	29



## РОЗДІЛ 2. ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

§ 4. Суміжні і вертикальні кути . . . . .	32
<i>Задачі за готовими малюнками</i> . . . . .	38
§ 5. Перпендикулярні і паралельні прямі . . . . .	39
§ 6. Ознаки паралельності прямих . . . . .	45
§ 7. Властивості паралельних прямих . . . . .	51
§ 8. Теореми і аксіоми . . . . .	57
<i>Задачі за готовими малюнками</i> . . . . .	64
<i>Самостійна робота 2</i> . . . . .	65
<i>Тестові завдання 2</i> . . . . .	66
<i>Типові задачі для контрольної роботи</i> . . . . .	67
<i>Запитання і завдання для самоконтролю</i> . . . . .	68
<i>Головне в розділі 2</i> . . . . .	69



## РОЗДІЛ 3. ТРИКУТНИКИ

§ 9. Трикутник і його елементи . . . . .	72
§ 10. Сума кутів трикутника . . . . .	76
§ 11. Про рівність геометричних фігур . . . . .	81

§ 12. Ознаки рівності трикутників . . . . .	86
<i>Самостійна робота 3</i> . . . . .	92
<i>Задачі за готовими малюнками</i> . . . . .	93
<i>Запитання і завдання для самоконтролю</i> . . . . .	94
<i>Тестові завдання 3</i> . . . . .	95
<i>Типові задачі для контрольної роботи</i> . . . . .	96
§ 13. Рівнобедрений трикутник . . . . .	97
§ 14. Третя ознака рівності трикутників . . . . .	103
§ 15. Нерівності трикутника . . . . .	108
§ 16. Прямокутний трикутник . . . . .	112
<i>Задачі за готовими малюнками</i> . . . . .	118
<i>Самостійна робота 4</i> . . . . .	119
<i>Тестові завдання 4</i> . . . . .	120
<i>Типові задачі для контрольної роботи</i> . . . . .	121
<i>Запитання і завдання для самоконтролю</i> . . . . .	122
<i>Головне в розділі 3</i> . . . . .	123



## РОЗДІЛ 4. КОЛО І КРУГ. ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ

§ 17. Коло і круг . . . . .	126
§ 18. Геометричні побудови . . . . .	131
§ 19. Геометричне місце точок . . . . .	137
§ 20. Коло і трикутник . . . . .	141
§ 21. Задачі на побудову . . . . .	147
<i>Задачі за готовими малюнками</i> . . . . .	153
<i>Самостійна робота 5</i> . . . . .	155
<i>Тестові завдання 5</i> . . . . .	156
<i>Типові задачі для контрольної роботи</i> . . . . .	157
<i>Головне в розділі 4</i> . . . . .	158
Задачі для повторення . . . . .	159
Завдання для позакласної роботи . . . . .	177
З історії геометрії . . . . .	180
Предметний покажчик . . . . .	183
Відповіді і вказівки . . . . .	185