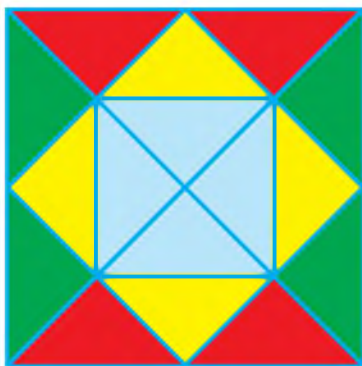


Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова,
О. М. Коломієць, З. О. Сердюк

АЛГЕБРА

Підручник для 7 класу
загальноосвітніх навчальних закладів



Київ
Видавничий дім «Освіта»
2015

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ:

 — поміркуйте

 — як записати в зошиті

 **Запам'ятайте!**

 — типова задача

 **Зверніть увагу:**



Тарасенкова Н. А.

Математика : підруч. для 7 класу загальноосвіт.
навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова,
О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. — К. : Видавничий дім
«Освіта», 2015. — 288 с.

Дорогі учні!

Ви приступаєте до вивчення нового предмета, який називається алгебра.

Алгебра — один із великих розділів математики. Вона виникла як наука про рівняння у зв'язку з потребами практики і як результат пошуку узагальнених способів розв'язування великої кількості схожих задач. Нині засобами алгебри користуються у багатьох галузях знань — фізиці, хімії, біології, економіці, комп'ютерних технологіях та інженерії.

У попередніх класах ви вже познайомилися з елементами алгебри. Тепер ви продовжите розвивати свої уміння рахувати, міркувати, порівнювати, робити обґрунтовані висновки. Для цього треба наполегливо й відповідально працювати на уроках, а також самостійно працювати вдома. А підручник вам у цьому допоможе.

Як успішно вивчати алгебру за цим підручником? Весь матеріал поділено на п'ять розділів, а розділи — на параграфи. У кожному параграфі є теоретичний матеріал і задачі. Найважливіші формулювання обведено рамкою з позначкою «Запам'ятайте», а поради — з позначкою «Зверніть увагу». Курсивом виділено терміни (наукові назви) понять. У рубриці «Дізнайтеся більше» зібрано цікавий і корисний додатковий матеріал.

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, допоможуть запитання рубрики «Пригадайте головне», а матеріал усієї теми — контрольні запитання і тестові завдання наприкінці розділу.

Задачі підручника мають чотири рівні складності. Номери задач початкового рівня складності позначено штрихом ('). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечками (°) позначають задачі середнього рівня складності. Їх треба навчитись розв'язувати усім, щоб мати змогу вивчати алгебру далі. Номери задач достатнього рівня складності не мають позначок біля номера. Навчившись розв'язувати їх, ви зможете впевнено демонструвати достатній рівень навчальних досягнень. Зірочками (*) позначено задачі високого рівня складності. Якщо не зможете відразу їх розв'язати, не засмувайтесь, а виявіть терпіння і наполегливість. Радість від розв'язання складної задачі буде вам нагородою.

**Бажаємо вам успіхів
у пізнанні нового і задоволення від навчання!**

РОЗДІЛ

1

ВИРАЗИ І ТОТОЖНОСТІ

У розділі дізнаєтесь:

- про числові вирази та їх види;
- чим відрізняються числовий вираз і вираз зі змінними;
- що таке допустимі значення змінних у виразі;
- які вирази називають цілими;
- як обчислювати значення виразу зі змінними;
- про способи спрощення виразів;
- яка рівність є тотожністю та як її доводити;
- як застосувати вивчений матеріал на практиці



§ 1. ЧИСЛОВІ ВИРАЗИ

Із курсу математики 5—6 класів ви знаєте, що таке *числовий вираз*. Пригадайте відповідне формулювання та порівняйте його з наведеним у підручнику.

Запам'ятайте!

Запис, у якому використовують тільки числа, знаки арифметичних дій і дужки, називається *числовим виразом*.

Наприклад, записи $15 + 3$, $15 - 3$, $15 \cdot 3$, $15 : 3$ є числовими виразами. Їх називають відповідно *сумою*, *різницею*, *добутком* і *часткою* чисел 15 і 3. У кожному із цих виразів числа 15 і 3 є *компонентами виразу*. Вираз 15^3 також є числовим. Його називають *степенем* числа 15. У ньому число 15 — основа степеня, а число 3 — показник степеня.

Якщо виконати арифметичну дію у виразі, то дістанемо число — *значення числового виразу*. Наприклад, значенням виразу $15 + 3$ є число 18.

Зверніть увагу:

числовий вираз показує, яку арифметичну дію (дії) треба виконати над числами, але не показує результат цієї дії (дій).

Ви знаєте, що дії додавання і віднімання є діями першого ступеня, дії множення і ділення — другого ступеня, а піднесення до степеня — третього ступеня. Обчислюючи значення числового виразу, спочатку з'ясовують, дії яких ступенів містить вираз, а потім виконують дії, дотримуючись відомого вам порядку виконання дій.

Задача 1. Знайдіть значення числового виразу:

1) $35 - 15 + 9$; 2) $35 : 7 + 4 \cdot 2^3$.

Розв'язання. 1. Даний вираз містить тільки дії першого ступеня, тому ці дії виконують за порядком написання зліва направо:

$$35 - 15 + 9 = 20 + 9 = 29.$$

2. Вираз $35 : 7 + 4 \cdot 2^3$ містить дії трьох ступенів, тому спочатку виконують дію третього ступеня, потім — дії другого ступеня (зліва направо), а після цього — дію першого ступеня:

$$35 : 7 + 4 \cdot 2^3 = 35 : 7 + 4 \cdot 8 = 5 + 4 \cdot 8 = 5 + 32 = 37.$$

❓ Чи залежить значення числового виразу від того, як у ньому розставлено дужки? Так. Наприклад, вирази $4 + (30 : 6 - 1)$ і $4 + 30 : (6 - 1)$ мають різні значення: $4 + (30 : 6 - 1) = 8$, а $4 + 30 : (6 - 1) = 10$. Отже, можемо записати:

$$4 + (30 : 6 - 1) \neq 4 + 30 : (6 - 1).$$

Зверніть увагу:

дужки у виразі змінюють порядок виконання дій.

Задача 2. Чи можна знайти значення числового виразу $25 : (3 \cdot 8 - 23 - 1)$?

▶ **Розв'язання.** Даний вираз містить ділення числа 25 на вираз, що стоїть у дужках. Виконавши дії в дужках, дістанемо: $3 \cdot 8 - 23 - 1 = 24 - 23 - 1 = 0$. Отже, щоб знайти значення заданого виразу, треба число 25 поділити на 0. А це зробити неможливо. Тому значення даного числового виразу знайти не можна.

🗉 Коротко говорять: «Даний вираз не має значення» або «Даний вираз не має змісту».

Зверніть увагу:

- ділити на 0 не можна;
- вираз, що містить ділення на нуль, *не має змісту*.

Узагальнимо відомості про порядок виконання дій у виразах.

Запам'ятайте!

Порядок виконання дій у виразах.

1. У виразі, що містить дії тільки одного ступеня, дії виконують у тому порядку, у якому вони записані.
2. У виразі, що містить дії трьох ступенів, першими виконують дії старшого ступеня в тому порядку, у якому вони записані.
3. У виразі з дужками спочатку виконують дії в дужках, а потім — інші дії за відомим порядком.

**Дізнайтеся більше**

1. У курсі математики 5—6 класів і в цьому параграфі ви зустрічали речення, які містять слова «називають» або «називається». Це *означення понять*. В означенні розкривається зміст поняття. Наприклад, в означенні числового виразу вказується властивість, за допомогою якої можна відрізнити числовий вираз від будь-яких інших записів. Раніше вам зустрічалися записи $3 * 5 + 4$, $2 \cdot 3 = 6$, $(a + 100) \cdot 2$. Їх не можна вважати числовими виразами, оскільки вони не задовольняють означення числового виразу. Справді, перший запис містить знак $*$, що не є знаком арифметичної дії. Другий запис містить знак рівності, а третій — букву.
2. **Граве Дмитро Олександрович** (1863—1939) — видатний математик, фундатор вітчизняної алгебраїчної школи, академік Академії наук УРСР (1919), почесний член АН СРСР (1929). Закінчив Санкт-Петербурзький університет (1885). У 1896 р. захистив дисертацію на ступінь доктора математики «Про основні завдання математичної теорії побудови географічних карт». Працював професором Харківського (1897), а потім Київського (1899) університетів. У 1934 став першим директором Інституту математики АН УРСР. Створив у Києві наукову алгебраїчну школу. Основні праці стосуються алгебри, прикладної математики, механіки, кібернетики, астрономії. Його «Трактат з алгебраїчного аналізу», який побачив світ у 1938, мав значний вплив на розвиток математики 20 ст.
Його учнями були Б. Делоне, М. Кравчук, М. Чеботарьов, О. Шмідт та ін.

ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що називається числовим виразом? Наведіть приклади.
2. Що називають значенням числового виразу?
3. Який порядок виконання дій у числовому виразі без дужок?
4. У якому порядку треба виконувати дії в числовому виразі з дужками?
5. У якому випадку числовий вираз не має змісту?



РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

1'. Чи є числовим виразом запис:

- 1) $14 : 2 + 5$; 3) $24 - 14 = 10$; 5) $4 \cdot x = 20$;
 2) $27 > 4 \cdot 3$; 4) $5\frac{2}{3} - 2 \cdot 5,2$; 6) $8^4 + 4^2$?

Відповідь поясніть.

2'. Наведіть приклад виразу, який для двох чисел є:

- 1) сумою; 2) різницею; 3) добутком; 4) часткою; 5) степенем.

3'. Чи правильно, що значенням числового виразу є: 1) буква; 2) слово; 3) речення; 4) сам числовий вираз; 5) число, яке отримали, виконавши дію в заданому виразі на одну дію; 6) число, яке отримали, правильно виконавши дію в заданому виразі на одну дію; 7) число, яке отримали, правильно виконавши якусь одну дію в заданому виразі на кілька дій; 8) число, яке отримали, правильно виконавши всі дії в заданому виразі на кілька дій?

4'. У якому порядку треба виконувати дії в числовому виразі, що містить дії: 1) першого ступеня; 2) другого ступеня; 3) першого і другого ступенів; 4) третього ступеня; 5) другого і третього ступенів; 6) усіх трьох ступенів?

5'. Чи правильно, що дужки у виразі: 1) не змінюють порядок виконання дій; 2) змінюють порядок виконання дій?

6'. Наведіть приклади числових виразів, які: 1) мають зміст; 2) не мають змісту.

7'. Чи правильно, що не має змісту вираз:

- 1) $5 - 0$; 3) $5 \cdot 0$; 5) $5 - (3 - 3)$; 7) $5 \cdot (3 - 3)$;
 2) $5 + 0$; 4) $5 : 0$; 6) $5 + (3 - 3)$; 8) $5 : (3 - 3)$?

8°. Значенням якого виразу є число 2:

- 1) $24 : 6 - 3$; 2) $(20 - 4) : 8$; 3) $3^2 - 2^3$; 4) $10 - 4 \cdot 2$?



9°. Значенням якого виразу є число 5: 1) $25 - 15 : 3$; 2) $(4^2 + 9) : 5$?


10°. Назвіть порядок виконання дій для обчислення значення числового виразу $5 + 2 \cdot 4 - 18 : 3^2$. Знайдіть значення виразу.

11°. Дано числа 2, 5 і 4. Складіть числовий вираз, який є їх:

- 1) сумою; 2) різницею; 3) добутком; 4) часткою.

Скільки числових виразів можна отримати? Знайдіть значення цих виразів.


12°. Дано числа 2 і 3. Складіть вирази для піднесення одного числа до степеня іншого. Скільки числових виразів можна отримати? Знайдіть значення цих виразів.

 **13°.** Дано числа 5 і 2. Складіть числовий вираз, який є: 1) сумою чисел; 2) різницею чисел; 3) добутком чисел; 4) часткою чисел; 5) степенем, у якому одне число підноситься до степеня іншого. Знайдіть значення цих виразів.

14°. Знайдіть значення виразу:

- 1) $15,6 + 27,8$; 4) $84,6 - 12,49$; 7) $48,56 : 1,6$;
 2) $14,275 + 10,8$; 5) $12,3 \cdot 5,8$; 8) $0,15 : 1,25$;
 3) $45,5 - 23,4$; 6) $0,28 \cdot 0,125$; 9) $1,8 : 0,24$.

Якими правилами виконання дій з десятковими дробами ви скористалися?

 **15°.** Знайдіть значення виразу:

- 1) $42,5 + 12,52$; 2) $34,6 - 15,54$; 3) $2,8 \cdot 0,15$; 4) $56,28 : 1,4$.

16°. Виконайте дії:

- 1) $12\frac{1}{6} + 8\frac{1}{3}$; 3) $7 - 2\frac{3}{13}$; 5) $2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{14}$; 7) $2\frac{3}{4} : 1\frac{3}{8}$;
 2) $16\frac{1}{8} + 2\frac{5}{6}$; 4) $8\frac{1}{10} - 5\frac{2}{3}$; 6) $5\frac{2}{5} \cdot 3\frac{1}{3}$; 8) $\frac{3}{10} : 2\frac{2}{5}$.

Якими правилами виконання дій зі звичайними дробами ви скористалися?


 **17°.** Виконайте дії:

- 1) $16\frac{1}{4} + 14\frac{1}{12}$; 2) $21\frac{1}{2} - 9\frac{1}{3}$; 3) $9\frac{2}{7} \cdot 7$; 4) $5\frac{1}{9} : 7\frac{2}{3}$.

18°. Обчисліть:

- 1) 2^2 ; 2) 5^3 ; 3) 3^5 ; 4) 7^1 ; 5) 4^3 ; 6) 1^7 ; 7) $\left(\frac{2}{13}\right)^2$; 8) $\left(5\frac{1}{3}\right)^2$.

Сформулюйте правило піднесення числа a до степеня n , яким ви скористалися.

 **19°.** Обчисліть: 1) 2^4 ; 2) 3^3 ; 3) 4^5 ; 4) $\left(1\frac{1}{3}\right)^2$.

20°. Обчисліть: 1) $-45,2 + 12,15$; 2) $25 - 38\frac{1}{3}$;

- 3) $-4\frac{3}{4} - 1,25$; 4) $-2,5 \cdot 1,2$; 5) $-2,8 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$; 6) $-14\frac{1}{3} : (-43)$.

Сформулюйте правила виконання дій з раціональними числами, якими ви скористалися.

 **21°.** Обчисліть:

- 1) $-14,7 + 10,15$; 2) $-12\frac{2}{3} - 3,5$; 3) $4,08 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$; 4) $-12,6 : \left(-\frac{3}{5}\right)$.

22°. Чи змінять дужки порядок виконання дій у виразі $20 + 5 \cdot 2^3 - 6 : 2$, якщо їх розставити так:

1) $(20 + 5) \cdot 2^3 - 6 : 2$;

3) $(20 + 5 \cdot 2^3) - 6 : 2$;

2) $20 + (5 \cdot 2^3 - 6) : 2$;

4) $20 + 5 \cdot (2^3 - 6 : 2)$?

Відповідь поясніть.

23°. У якому порядку треба виконувати дії в числовому виразі з дужками, що містить дії: 1) першого і другого ступенів; 2) другого і третього ступенів; 3) усіх трьох ступенів? Скільки випадків потрібно розглянути? Наведіть приклади.

24°. Запишіть у вигляді виразу і знайдіть його значення:

1) добуток суми чисел 3,5 і $-4,5$ та числа 42;

2) різниця числа 4,67 та добутку чисел 2,18 і 0,5;

3) сума квадрата числа 3 і числа $5\frac{2}{7}$;

4) різниця куба числа 4 і числа $-0,1$;

5) добуток числа 3 і квадрата числа $-\frac{2}{3}$;

6) частка суми чисел 3,2 і $1\frac{1}{3}$ та числа 0,5.



25°. Запишіть у вигляді виразу і знайдіть його значення:

1) добуток числа $-2,5$ та суми чисел 34,8 і $-2,8$;

2) різниця квадрата числа 1,2 і куба числа 4;

3) сума числа $5\frac{2}{7}$ та частки чисел 5 і 7;

4) частка числа 2,5 та добутку чисел $1\frac{1}{3}$ і $\frac{9}{20}$.

26°. Перевірте, чи має зміст вираз:

1) $2,5 - (1,4 - 7 \cdot 0,2)$;

3) $5 \cdot 2,04 + \frac{0,8}{-4,5 \cdot 2 + 9}$;

2) $\frac{5,4 : 2,7 - 2}{0,2}$;

4) $2\frac{1}{4} : \left(17,5 - 8\frac{3}{4} \cdot 2\right)$.

Чи потрібно виконувати всі дії? Відповідь поясніть.



27°. Чи має зміст вираз: 1) $\frac{0,8 \cdot 5 - 4}{1,5}$; 2) $12 + 28 : (15 \cdot 0,2 - 3)$?

28. Складіть числовий вираз, значення якого дорівнює:

1) 14; 2) -5 ; 3) $2\frac{1}{3}$; 4) $-0,5$.

 29. Складіть числовий вираз, значення якого дорівнює:

1) 20; 2) $-5\frac{1}{6}$.


30. Знайдіть значення виразу:

1) $0,12 \cdot 10 + 2,4 \cdot 5 \cdot 12 - 9 : 1,8$;

2) $(15 \cdot 0,012 + 15 : 10^2) : 0,66 - 1,8^2$;

3) $-5\frac{5}{6} : \frac{7}{18} - \left(-3\frac{1}{8}\right) \cdot (-0,8) + (-3,6)$;

4) $(3,4 + 5,1) \cdot 1\frac{3}{17} + \left(1\frac{45}{46} - 2\frac{7}{23}\right) : \frac{15}{23}$.

 31. Знайдіть значення виразу:

1) $2,5 \cdot 2^3 + 7,5 \cdot (0,04 + 1,6^2) - 1,8 : 90$;

2) $\left(4\frac{7}{12} - 3\frac{17}{36}\right) : 1\frac{2}{3} + 4\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{26}\right) + 2,5$.

32. Виконайте дії:

1) $6\frac{13}{22} - 5\frac{5}{11} : 4 + 1\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{11} + \frac{25}{36} : \frac{25}{18}$; 2) $\frac{0,125 : 0,3125 + 2,25 \cdot \frac{4}{5}}{\left(1\frac{55}{72} - 2\frac{1}{48}\right)} : 3\frac{1}{12} - 3,6$;

3) $1,2 : (0,171 : 0,9 - 0,028 \cdot 2,5) + 0,8 \cdot \left(3\frac{4}{15} + 1\frac{5}{24} - 3\frac{9}{40}\right) - 0,075 : \frac{3}{400}$;

4) $\left(\frac{11}{9 - 2\frac{1}{3}} - \frac{1}{6} \cdot 12,5 + 1\frac{13}{30}\right) : 0,016 - 0,005 \cdot 10\,500$.

 33. Виконайте дії:

1) $\left(10\frac{9}{35} - 8\frac{7}{30}\right) : 1\frac{3}{14} + 4 \cdot \left(1,35 : 0,9 - 1,5 \cdot \frac{7}{9}\right) + 0,204 \cdot 25 - 7,1$;

2) $\frac{4\frac{2}{3} \cdot 0,63 : 2,8 + 0,95}{\left(9\frac{3}{4} - 12,45\right)} : 1,35 - 12,5 : 1\frac{1}{4}$.

34. У 7-А класі навчаються 25 учнів, у 7-Б класі — на 2 учні більше, ніж у 7-А класі, а в 7-В класі — на 5 учнів менше, ніж у 7-Б класі. Скільки учнів навчаються в цих класах разом? Складіть числовий вираз для розв'язування задачі та знайдіть його значення.



35. На першій полиці стоять 18 книг, на другій — на 4 книги менше, ніж на першій, а на третій — стільки книг, як на першій і другій полицях разом. Скільки книг стоять на трьох полицях разом? Складіть числовий вираз для розв'язування задачі та знайдіть його значення.

36. Яке число треба поставити замість зірочки, щоб вираз не мав

змісту: 1) $\frac{0,3 \cdot 5^2 + 15}{3,5 \cdot 4 - *}$; 2) $\frac{4,2 : 6 - 3\frac{1}{3} \cdot 0,6}{5 \cdot (* + 7,5 : 0,5)}$?



37. Яке число треба поставити замість зірочки, щоб вираз не мав

змісту: 1) $\frac{1,7 \cdot 3^2 + \frac{2}{3} \cdot 15}{* - 2,4 : 0,12}$?

38*. У виразі $1,5 - \frac{1}{4} : 3\frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot 4,5^2$ розставте дужки так, щоб значення виразу було: 1) найбільшим; 2) найменшим.

39*. Обчисліть зручним способом:

1) $9 + 99 + 999 + 9999 + 99\,999$;

2) $1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 999 - 1000$;

3) $\left(\left(1 - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{17} \right) + \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{29} \right) + \left(\frac{1}{29} - \frac{1}{41} \right) + \left(\frac{1}{41} - \frac{1}{51} \right) \right) \cdot 1\frac{1}{50}$;

4) $\left(\left(2 - \frac{1}{7} \right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) - \dots - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \right) : \frac{5}{14}$;

5) $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 - 7 \cdot 8 \cdot 9}{7 \cdot 8 \cdot 9 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$;

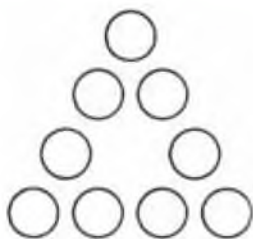
6) $\frac{101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot 104 - 100 \cdot 101 \cdot 102 \cdot 103}{102 \cdot 103 \cdot 104 \cdot 105 - 101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot 104}$.

40*. Розв'яжіть рівняння:

1) $18\frac{3}{4} : \left(30,5 - \left(\frac{\left(8\frac{5}{8} - 6\frac{1}{4} \right) : 1\frac{1}{4}}{2,4x - 8,2} + 17,5 \right) \right) = 1,5$;

2) $12,6 : \left(5\frac{2}{15} + \left(5\frac{5}{9} - \frac{8,75}{x : \frac{8}{21} - 1,4} \right) \cdot 5\frac{68}{125} \right) - \frac{2}{11} = 0,8$.

- 41*. Розставте числа від 1 до 9 в кружечках на малюнку 1 так, щоб сума чисел на кожній стороні трикутника дорівнювала 20.



Мал. 1

**ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ**

42. Скільки пляшок ємністю 250 мл знадобиться бабусі, щоб розлити в них 5 л соку? Складіть числовий вираз для розв'язування задачі та знайдіть його значення.
43. У бензобак машини вміщується 45 л бензину. Витрати бензину становлять 8,5 л на кожні 100 км шляху. Машина вирушила в подорож з повним бензобаком і проїхала 300 км. Обчисліть, скільки літрів бензину залишилось у бензобаку після закінчення подорожі. Складіть числовий вираз для розв'язування задачі та знайдіть його значення.
44. Складіть задачу про свій вік і вік інших членів своєї родини. Складіть числовий вираз для розв'язування задачі та знайдіть його значення.
45. Складіть задачу про кількість хлопців і дівчат у вашому класі. Складіть числовий вираз для розв'язування задачі та знайдіть його значення.

**ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ**

46. Знайдіть:

1) 0,5 числа 300;

3) $\frac{3}{7}$ числа 21;

2) 0,15 числа 90;

4) $\frac{3}{20}$ числа 0,8.

47. Знайдіть число, якщо:

1) його 0,3 дорівнюють 24;

3) його $\frac{9}{20}$ дорівнюють 270;

2) його 0,25 дорівнюють 0,25;

4) його $\frac{3}{11}$ дорівнюють 0,3.

48. У трьох шостих класах школи навчаються 84 учні. Кількість учнів 7-Б класу становить 75 % кількості учнів 7-А класу, а кількість учнів 7-В класу — 50 % кількості учнів 7-А і 7-Б класів разом. Скільки учнів навчаються в кожному класі?

§ 2. ВИРАЗИ ЗІ ЗМІННИМИ

Подивіться на малюнок 2. Ви бачите спортсменів на змаганнях з потрійного стрибка. Виконуючи три елементи такого стрибка (скачок, крок і стрибок), кожен спортсмен долає відстані, властиві тільки йому, а сума цих відстаней складає довжину стрибка. Якщо позначити ці відстані буквами a , b і c , то для довжини потрійного стрибка дістанемо вираз: $a + b + c$. Ви знаєте, що це — *буквений вираз*. Для кожного спортсмена відстані, позначені буквами a , b і c , є різними, і вони можуть змінюватися залежно від різних обставин. Тому букви в цьому виразі можна називати *змінними*, а сам вираз — *виразом зі змінними*.



Мал. 2

? Чи кожен буквений вираз є виразом зі змінними? Ні. Наприклад, ви знаєте, що буквою π позначають відношення довжини кола до його діаметра. Але це число є сталим для будь-якого кола і не може змінюватися, воно є *константою*: $\pi \approx 3,14$. Тому буквений вираз, наприклад 2π , не є виразом зі змінною. Пізніше в курсі математики і фізики ви ознайомитеся і з іншими константами.

Запам'ятайте!

Запис, у якому використовують змінні, позначені буквами, числа, знаки арифметичних дій і дужки, називається виразом зі змінними.

Саму змінну також вважають виразом зі змінними. І це найпростіший із таких виразів. Наприклад, довжину сторони квадрата можна подати так: a .

Замість змінних, що входять до виразу, можна підставити числа — *значення змінних*. Тоді вираз зі змінними перетвориться на числовий вираз. Виконавши обчислення, дістанемо число, яке називають *значенням виразу* для заданих значень змінних. Наприклад, вираз $2(a + b)$ використовують для обчислення периметра прямокутника зі сторонами a і b . Звідси:

$$\text{якщо } a = 1 \text{ і } b = 3, \text{ то } 2(a + b) = 2 \cdot (1 + 3) = 8;$$

$$\text{якщо } a = 5 \text{ і } b = 2, \text{ то } 2(a + b) = 2 \cdot (5 + 2) = 14;$$

$$\text{якщо } a = 3,5 \text{ і } b = 6,1, \text{ то } 2(a + b) = 2 \cdot (3,5 + 6,1) = 19,2 \text{ і т.д.}$$

Зверніть увагу:

значення виразу зі змінними залежить від значень змінних, що входять до нього.

? Чи завжди можна обчислити значення виразу зі змінними? Ні. Наприклад, якщо $x = 2$, то вираз $\frac{15}{x-2}$ втрачає зміст,

оскільки його знаменник перетворюється на 0, а на 0 ділити не можна. Отже, число 2 є *недопустимим значенням змінної* для даного виразу. Будь-яке інше число не перетворює на нуль знаменник даного виразу і тому є *допустимим значенням змінної* для нього.

Отже, вираз $\frac{15}{x-2}$ має зміст, лише якщо $x \neq 2$.

Усі значення змінної, допустимі для даного виразу, утворюють *область допустимих значень (ОДЗ) змінної* цього виразу. У розглянутому прикладі — це всі значення змінної x , що не дорівнюють 2.



Коротко це записують так: ОДЗ: $x \neq 2$.

Вирази зі змінними можна поділити на види залежно від тих дій, які містяться в цих виразах. Якщо вираз містить лише дії додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до степеня з натуральним показником, то такий вираз називають *раціональним*. Усі вирази, які розглядалися у цьому параграфі, є раціональними. У наступних класах ви ознайомитеся і з іншими діями, наявність яких у виразі робить його *іраціональним*.

Раціональні вирази, своєю чергою, поділяються на *цілі* та *дробові* вирази.

Запам'ятайте!

Вираз називається цілим, якщо він не містить ділення на вираз зі змінними.

Наприклад, цілими є вирази: $(2 + a) : 30$, $\frac{5}{9}x$, $-b + \frac{c-3}{2}$.

Прикладами дробових виразів є вирази: $\frac{2+a}{ab+3}$, $(b - a) : (a - 5b + 3)$. Дробові вирази ви будете вивчати пізніше.



З а д а ч а. Які значення змінних є допустимими для виразу:

1) $\frac{12}{x(5+x)}$; 2) $\frac{2+ab}{30}$?

Розв'язання. 1) Вираз $\frac{12}{x(5+x)}$ містить ділення на добуток двох множників x і $5 + x$, які перетворюють знаменник на нуль, якщо $x = 0$ і $x = -5$ відповідно. Отже, числа 0 і -5 є недопустимими значеннями змінної x для даного виразу. Відтак ОДЗ: $x \neq 0$, $x \neq -5$.

2) Вираз $\frac{2+ab}{30}$ містить ділення на число, але не містить ділення на вираз зі змінними. Отже, це — цілий вираз, тому для нього будь-які значення змінних a і b є допустимими. Відтак ОДЗ: a — будь-яке число, b — будь-яке число.



Зверніть увагу:

для цілого виразу ОДЗ кожної змінної — будь-яке число.



Дізнайтеся більше

Алгебра (походить від арабського слова $\alpha\lambda\delta\phi\epsilon\beta\rho$, що означає «поновлення» або «відновлення») — одна з провідних галузей сучасної математики, а також один із предметів шкільного навчання. Слово $\alpha\lambda\delta\phi\epsilon\beta\rho$ уперше зустрічається у творі **Аль-Хорезмі** (IX ст.). Цей твір був присвячений розв'язуванню рівнянь першого і другого степенів. Пізніші переклади зробили слово $\alpha\lambda\delta\phi\epsilon\beta\rho$ назвою всієї науки «алгебри», яка довгий час була наукою про рівняння.

Зародження алгебри слід віднести до тих часів, коли в арифметику почали вводити невідому величину і спеціальний символ для її позначення, формулювати загальні правила розв'язування арифметичних задач певного типу й у зв'язку з цим складати й розв'язувати рівняння. У цьому розумінні певні алгебраїчні факти були відомі ще в Стародавніх Вавилоні та Єгипті, в Індії та Китаї.



ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що називається виразом зі змінними? Наведіть приклади.
2. Поясніть, як обчислити значення виразу зі змінними.
3. Що таке допустимі значення змінної для виразу зі змінними?
4. Які вирази називають раціональними?
5. Які вирази називаються цілими?



РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

49'. Прочитайте вираз:

1) $5a + 6b$; 2) $15 \cdot 2,4 + 17$; 3) $m + 25n$; 4) $4^2 + 4^3$; 5) abc ; 6) $\frac{2x}{3y}$.

Чи є даний вираз виразом зі змінними? Відповідь поясніть.

50'. Значення виразу $3x - 2y$ дорівнює 1, якщо $x = 5$ і $y = 7$. Назвіть: 1) вираз зі змінними; 2) змінні у виразі; 3) значення виразу; 4) значення змінних. Чи зміниться значення даного виразу, якщо змінити значення: а) змінної x на $-0,5$; б) змінної y на 8; в) змінної x на 2, а змінної y на -2 ?

51'. Дано вираз: $(x - 5) : (x + 7)$. Чи є допустимим для даного виразу таке значення змінної x :

1) -5 ; 2) 5 ; 3) 7 ; 4) -7 ?

Назвіть ОДЗ змінної даного виразу.

52'. Чи є даний вираз цілим:

1) $a + 4,5b$;

3) $(m - n) : 5n$;

5) $\frac{abc}{3}$;

2) $\frac{2m}{27}$;

4) $\frac{15}{x-5}$;

6) $\frac{1}{3}x + \frac{4}{x}$?

Відповідь поясніть.

53'. Дано вираз: $\frac{12}{(x+4)(9-x)}$. Чи правильно визначено ОДЗ його

змінної:

1) $x \neq -4$;

3) $x \neq 12$;

5) $x \neq 4, x \neq 9$.

2) $x \neq 9$;

4) $x \neq 4, x \neq -9$;

6) $x \neq -4, x \neq 9$.

Відповідь поясніть.

54'. Чи правильно, що значення виразу $2a + 10$ дорівнює 0, якщо:

1) $a = 2$;

2) $a = -5$;

3) $a = 0,5$;

4) $a = 0$?

55'. Олег стверджує, що можна обчислити всі значення виразу $4a - 12$. Чи правий Олег?

56°. Запишіть у вигляді виразу: 1) суму змінних a і b ; 2) частку змінних c і d ; 3) квадрат змінної p ; 4) потроєну суму змінної k і числа 8; 5) різницю подвоєної змінної a і змінної b ; 6) суму змінної a і різниці змінної b і числа 5; 7) частку від ділення числа 12 на суму змінних a і b ; 8) добуток числа 5 та суми змінних n і m ; 9) частку від ділення суми змінної a і числа 10 на різницю змінної b і числа 8; 10) суму потроєної змінної x і подвоєної змінної y .



57°. Запишіть у вигляді виразу: 1) добуток змінних a і b ; 2) різницю змінних c і d ; 3) суму добутку числа 7 і змінної a та частки від ділення числа 9 на змінну b ; 4) суму потроєної змінної c і числа 7; 5) різницю числа 10 і добутку числа 5 і змінної c ; 6) добуток квадрата змінної x і куба змінної y .

58°. За даними таблиці 1 знайдіть значення виразів.

Таблиця 1

a	10	8,4	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$
b	-5	4,8	$\frac{2}{3}$	10
$2a + 0,5b$				
$\frac{a-2b}{4}$				



59°. За даними таблиці 2 знайдіть значення виразів.

Таблиця 2

c	9	3,6	2,25	0,81
d	-50	3	-8	0,125
$\frac{1}{3}c - 0,4d$				

60°. У 7-А класі навчаються a учнів, у 7-Б класі — на 2 учні більше, ніж у 7-А класі, а в 7-В — на 5 учнів менше, ніж у 7-Б класі. Скільки учнів навчаються в усіх сьомих класах разом? Складіть вираз для розв'язування задачі та знайдіть його значення для:

1) $n = 17$; 2) $n = 22$.



61°. Зошит коштує a грн, а блокнот — на 7 грн більше. Скільки коштують 5 таких зошитів і 10 блокнотів разом? Складіть вираз для розв'язування задачі та знайдіть його значення для $a = 3$.

62°. Чи всі значення змінної a є допустимими для виразу:

1) $5a + 4$; 2) $\frac{3}{a-3}$; 3) $\frac{4a-5}{2}$; 4) $\frac{2}{a}$; 5) $1,5(a+10)$; 6) $\frac{6}{9-a}$?

Відповідь поясніть.




63°. Чи всі значення змінної b є допустимими для виразу:

1) $12 - 6b$; 2) $\frac{b-7}{3}$; 3) $\frac{4}{6-b}$; 4) $\frac{5}{9}b$?

64°. У числовому виразі $\frac{3 \cdot 4 + 10 : 4}{4 \cdot 2}$ замініть число 4 на букву a .

Чи всі значення змінної a є допустимими для отриманого виразу?

 **65°.** У числовому виразі $\frac{12+(5 \cdot 2-4)}{5-6}$ замініть число 5 на букву b .

Чи всі значення змінної b є допустимими для отриманого виразу?

66. Чи правильно, що лише для $x+4$ має зміст вираз:


1) $\frac{15x}{4}$; 2) $\frac{18}{x-4}$; 3) $\frac{-6x}{4+x}$; 4) $\frac{x+5}{4-x}$.

Відповідь обґрунтуйте.

67. Чи є цілим вираз:

1) $\frac{2a-14}{5 \cdot 0,2}$; 2) $\frac{6-20 \cdot 0,3}{7-b}$; 3) $\frac{10x+y}{x}$; 4) $\frac{7m}{(m+5)(n-5)}$?

Відповідь обґрунтуйте.


 **68.** Чи є цілим вираз: 1) $\frac{9+4,5x}{3x}$; 2) $\frac{12a-5}{4 \cdot 0,5+3}$?

Відповідь обґрунтуйте.

69. Чи всі значення змінних є допустимими для виразу:

1) $2a-b+3c$; 3) $\frac{7c-5}{c}$; 5) $\frac{14}{17}(a+b)$;

2) $\frac{2}{b-4}$; 4) $\frac{2m}{27}$; 6) $\frac{6}{9-n}$?

 **70.** Чи всі значення змінних є допустимими для виразу:

1) $4a-6b$; 2) $\frac{c+0,5d}{10}$; 3) $\frac{m}{16-m}$; 4) $\frac{4}{9}(p+6n)$?

71. Укажіть ОДЗ змінних виразу та обчисліть його значення:

1) $6a+4b$ для $a=\frac{2}{3}$, $b=-0,25$;

2) $0,4c-4d^2+4,5$ для $c=-20$, $d=\frac{1}{2}$;

3) $\frac{2(ab+4)+c}{11}$ для $a=-2,8$, $b=\frac{5}{7}$, $c=0,4$;

4) $3,5n-5(m^2-1)+1,2\left(4p-\frac{3}{16}\right)$ для $n=2$, $m=0,5$, $p=1\frac{3}{16}$;

5) $\frac{\left(1,25 \cdot k+1\frac{1}{4} \cdot t\right) \cdot 2\frac{1}{7}}{h-5\frac{1}{3}}$ для $k=1\frac{1}{8}$, $t=-1\frac{1}{8}$, $h=1,5$;

$$6) \frac{\left(5,4 - x \cdot 2\frac{2}{3} + (0,3 - 0,5 \cdot x) \cdot \frac{4}{7}\right) \left(36y - 5\frac{1}{4}\right)}{y \cdot 13\frac{1}{3} + \frac{1}{24}} \text{ для } x = 4, y = \frac{1}{4}.$$

 72. Укажіть ОДЗ змінних виразу та обчисліть його значення:

1) $-5,4a + 6b - 12$ для $a = \frac{4}{9}$, $b = -0,15$;

2) $5(2,5n^2 - m) - 9\left(p - 2\frac{1}{9}\right)$ для $n = 0,2$, $m = -2,8$, $p = -4\frac{2}{9}$;

3) $\frac{2 + 2c - 3\frac{11}{36}}{-3 + d}$ для $c = \frac{1}{96}$, $d = -\frac{1}{12}$;

4) $\left(\frac{11}{7 + y} - 2x \cdot 12,5 + 1\frac{13}{30}\right) : 0,017 - 0,5 \cdot 105$ для $x = \frac{1}{12}$, $y = \frac{1}{3}$.

73. Автомобіль рухається зі швидкістю 60 км/год. Складіть вираз для знаходження відстані, яку проїде автомобіль за t год. Знайдіть значення виразу, якщо:

1) $t = 4$ год;

3) $t = 2$ год 30 хв;

2) $t = 4$ год 30 хв;

4) $t = 5$ год 20 хв.


74. Одна сторона прямокутника дорівнює a см, а інша — на 5 см більша. Складіть вирази для знаходження периметра і площі прямокутника. Знайдіть значення цих виразів, якщо:

1) $a = 2$ см;

3) $a = 3$ дм;

2) $a = 5$ см;

4) $a = 6$ см 4 мм.

 75. Складіть вирази для знаходження периметра і площі квадрата зі стороною c . Знайдіть значення цих виразів, якщо:

1) $c = 3$ см;

2) $c = 4$ см 5 мм.

76*. Відомо, що для деяких значень x і y значення виразу $x - y$ дорівнює 6,2. Якого значення за тих самих значень x і y набуває вираз:

1) $4x - 4y$; 2) $y - x$; 3) $0,25(2y - 2x)$; 4) $\frac{-3x + 3y}{0,2}$?

77*. Відомо, що для деяких значень c і d значення виразу $c + d$ дорівнює $\frac{2}{3}$. Якого значення за тих самих значень c і d набуває вираз:

1) $6c + 6d - 6$;

2) $\frac{-c - d}{0,4}$?

78*. Відомо, що $a + 3b = 6$ і $c = 4$. Знайдіть значення виразу:

1) $a + 3(b + c)$; 2) $6b + 2(a - 5c)$; 3) $\frac{(a - b) + 4(b + c)}{8}$.

79*. Запишіть число, яке: 1) є наступним для натурального числа n ; 2) дорівнює добутку трьох послідовних чисел, найбільше з яких m ; 3) у своєму записі має a тисяч, b сотень, c десятків і d одиниць.

80*. Знайдіть значення y , за яких дріб $\frac{10}{|y - 5|}$:

1) дорівнює 10; 2) не має змісту.

81*. Знайдіть ОДЗ змінних виразу:

1) $\frac{2}{2 - \frac{2}{x}}$; 2) $\frac{4}{4 - \frac{4}{x - 4}}$.



ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

82. Складіть вираз для обчислення кількості учнів у 7 класі, у якому навчаються a хлопців та b дівчат. Обчисліть значення цього виразу за даними вашого класу.

83. На придбання меблів для кабінету виділено кошти. Розрахуйте варіанти мінімальної та максимальної вартості комплекту, що містить a столів, b стільців, c шаф та d стелажів, якщо вартість столів становить 450—550 грн, стільців — 120—135 грн, шаф — 1200—1500 грн, стелажів — 800—950 грн. Урахуйте, що для оптових покупців діє знижка 10%. Обчисліть вартість покупки, якщо $a = 6$, $b = 6$, $c = 1$, $d = 3$.



ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

84. Обчисліть:

1) 5 % числа 55; 3) 120 % числа 4,5;
2) 60 % числа 30; 4) 72 % числа $3\frac{3}{8}$.

85. Знайдіть число:

1) 8 % якого дорівнюють 24;
2) 9 % якого дорівнюють 8, 1;
3) 13 % якого дорівнюють $\frac{13}{25}$;
4) 105 % якого дорівнюють 21.

§ 3. ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗІВ

Ви вже знаєте, що два числові вирази можуть мати рівні значення, і тоді ці вирази можна прирівняти. Наприклад, $10 \cdot 2 + 5 = 31 - 2 \cdot 3$. Про вирази зі змінними такого однозначно сказати не можна. Розглянемо приклади.



Задача 1. Чи можна прирівняти вирази: 1) $3a + b - a$ і $2a + b$; 2) $abb : b$ і ab ?

Розв'язання. 1. Вирази $3a + b - a$ і $2a + b$ містять однакові змінні і є цілими. Тому ОДЗ змінних першого виразу (ОДЗ-1) і другого виразу (ОДЗ-2) збігаються. Можемо записати спільно:

ОДЗ: a і b — будь-які числа.

Оскільки $3a - a = 2a$ для будь-яких значень a , то, яким би не було b :

$$3a + b - a = 2a + b.$$

Отже, для будь-яких значень a і b вирази $3a + b - a$ і $2a + b$ прирівняти можна.

Наприклад:

якщо $a = -5$, $b = 0$, то

$$3a + b - a = 3 \cdot (-5) + 0 - (-5) = -15 + 0 + 5 = -10,$$

$$2a + b = 2 \cdot (-5) + 0 = -10 + 0 = -10;$$

якщо $a = 1,5$, $b = 4,3$, то

$$3a + b - a = 3 \cdot 1,5 + 4,3 - 1,5 = 4,5 + 4,3 - 1,5 = 7,3,$$

$$2a + b = 2 \cdot 1,5 + 4,3 = 3 + 4,3 = 7,3.$$

2. Вирази $abb : b$ і ab містять однакові змінні. Але в першому виразі є ділення на вираз зі змінною, а другий вираз є цілим. Тому ОДЗ змінних першого виразу (ОДЗ-1) і другого виразу (ОДЗ-2) не збігаються:

ОДЗ-1: a — будь-яке число, $b \neq 0$,

ОДЗ-2: a і b — будь-які числа.

Оскільки для $b = 0$ перший вираз втрачає зміст, то для будь-яких значень a і b вирази $abb : b$ і ab прирівняти не можна. Рівність справджується лише для $b \neq 0$.

Запам'ятайте!

Два вирази зі змінними називаються *тотожно рівними*, якщо вони набувають відповідно рівних значень за будь-яких значень їх змінних.

Зверніть увагу:

перевіряючи два вирази зі змінними на тотожну рівність, спочатку потрібно впевнитися, що їх ОДЗ збігаються.

У розглянутій задачі 1 вирази $3a + b - a$ і $2a + b$ є тотожно рівними, а вирази $abb : b$ і ab — ні.

Заміну виразу тотожно рівним йому виразом називають *тотожним перетворенням виразу*. Наприклад:

$$3a + b - a = 2a + b.$$

Тотожні перетворення використовують для *спрощення виразів*. Так, в останньому прикладі за допомогою тотожного перетворення вираз із трьома доданками замінили виразом із двома доданками. Для цього у виразі $3a + b - a$ спочатку виявили *подібні доданки* ($3a$ і $-a$), а потім *звели* їх (тобто виконали вказану дію й отримали $2a$).

? Чому $3a$ і $-a$ є подібними доданками? Тому що в цих доданків однакова буквенна частина.

Спрощення виразів здійснюють згідно із законами додавання і множення. Пригадайте їх (табл. 3).

Таблиця 3

Зако́ни додавання і множення

ПЕРЕСТАВНИЙ ЗАКОН		СПОЛУЧНИЙ ЗАКОН	
додавання	множення	додавання	множення
Для будь-яких a, b		Для будь-яких a, b, c	
$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$	$(a + b) + c =$ $= a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c =$ $= a \cdot (b \cdot c)$
РОЗПОДІЛЬНИЙ ЗАКОН множення відносно додавання			
Для будь-яких a, b, c			
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$			

Задача 2. Спростіть вираз:

1) $14a \cdot 0,5bc$; 2) $25xy - 2x + 5y + 3xy + 8x : 4 - 2$.

Розв'язання. 1) $14a \cdot 0,5bc = 14 \cdot 0,5 \cdot abc = 7abc$;
 2) $25xy - 2x + 5y + 3xy + 8x : 4 - 2 =$
 $= 25xy - \cancel{2x} + 5y + 3xy + \cancel{2x} - 2 =$
 $= 28xy - 0 \cdot x + 5y - 2 =$
 $= 28xy + 5y - 2.$

**Зверніть увагу:**

подібні доданки, у яких числові коефіцієнти є протилежними числами, *взаємно знищуються*.

Так, у задачі 2 дістали: $-2x + 2x = (-2 + 2) \cdot x = 0 \cdot x = 0$.

Щоб спростити вираз із дужками, спочатку *розкривають дужки*, спираючись на відповідні правила, а потім зводять подібні доданки.

Пригадаємо *правила розкриття дужок*.

Запам'ятайте!**Правила розкриття дужок.**

Якщо перед дужками стоїть знак «+», то, розкриваючи дужки, знаки доданків у дужках зберігають.

Якщо перед дужками стоїть знак «-», то, розкриваючи дужки, знаки доданків у дужках змінюють на протилежні.

Наприклад:

$$\begin{aligned} -(x + 5) + (2x - 3) - (7 - 3x) &= \\ = -x - 5 + 2x - 3 - 7 + 3x &= \\ = 4x - 15. & \end{aligned}$$

Якщо перед дужками стоїть числовий множник або множник зі змінними, то, розкриваючи дужки, також користуються певними правилами.



Задача 3. Спростіть вираз $2x(y + 3z - 4) - 5(xy + xz - 6)$.



Розв'язання.

$$\begin{aligned} 2x(y + 3z - 4) - 5(xy + xz - 6) &= \\ = 2xy + 6xz - 8x - 5xy - 5xz + 30 &= \\ = -3xy + xz - 8x + 30. & \end{aligned}$$

**Зверніть увагу:**

щоб не помилитися, розкриваючи дужки у виразі:

- 1) порахуйте кількість доданків у дужках;
- 2) щоразу називайте кількість доданків у дужках і номер того доданка, який множите на вираз перед дужками, наприклад: «У дужках п'ять доданків; множимо перший доданок. У дужках п'ять доданків; множимо другий доданок і т.д.»

Із курсу математики 5—6 класів ви знаєте, що перетворення суми або різниці виразів у добуток нерідко пов'язане із *винесенням спільного множника за дужки*.



Задача 4. У виразі $16nmk + 8nm - 12mk$ винесіть спільний множник за дужки.



Розв'язання. Спочатку визначимо спільний множник для доданків даного виразу. Кожен доданок має числовий коефіцієнт, а НСД чисел 16, 8 і 12 дорівнює 4. Тому число 4 — це коефіцієнт спільного множника. Буквені частини кожного з доданків містять змінну m , а дві інші змінні (n і k) є не в кожному з доданків. Тому буквені частини спільного множника міститиме лише змінну m . Отже, спільний множник дорівнює $4m$. Винесемо його за дужки:

$$16nmk + 8nm - 12mk = 4m(4nk + 2n - 3k).$$



Зверніть увагу:

щоб перевірити, чи правильно виконали винесення спільного множника за дужки, виконайте обернену дію, тобто розкрийте дужки.



Дізнайтеся більше

Позначення невідомих величин за допомогою букв уперше зустрічається в записах у **Діофанта Александрійського** (бл. III ст.). Невідому величину Діофант називає «число» (ἀριθμός) і позначає літерою ζ , квадрат невідомої — символом δ^v (скорочення від δύναμις — «ступінь»). Проте повне значення буквені символіки відносять до заслуг Франсуа Вієта, який вперше застосував її для позначення величин і коефіцієнтів. Завдяки введенню буквених коефіцієнтів стало можливим застосування загальних формул та дослідження алгебраїчних рівнянь у загальному вигляді.



ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Які вирази називаються тотожно рівними?
2. Що називають тотожним перетворенням виразу?
3. Для чого використовують тотожні перетворення виразів?
4. Як зводять подібні доданки?
5. Як розкрити дужки, якщо перед дужками стоїть знак «+»; знак «-»?
6. Як винести спільний множник за дужки?

**РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ**

- 86'.** Чи можуть бути тотожно рівними два вирази, якщо: 1) їх буквені частини містять неоднакові змінні; 2) їх буквені частини містять однакові змінні; 3) ОДЗ-1 і ОДЗ-2 не збігаються; 4) ОДЗ-1 і ОДЗ-2 збігаються; 5) вирази набувають нерівних значень за тих самих значень змінних; 6) один вираз є цілим, а другий містить ділення на змінну?
- 87'.** Чи правильно, що у виразі подібними є такі доданки, у яких: 1) той самий числовий коефіцієнт; 2) однакова буквена частина?
- 88'.** Чи правильно, що у виразі взаємно знищуються такі подібні доданки, у яких числові коефіцієнти є: 1) взаємно оберненими числами; 2) додатними числами; 3) від'ємними числами; 4) протилежними числами?
- 89'.** У виразі перед дужками стоїть знак «+». Чи правильно розкрити дужки, якщо: 1) знак першого доданка збережуть, а знаки інших доданків поміняють; 2) знак першого й останнього доданків збережуть, а знаки інших доданків поміняють; 3) не поміняють знаки жодного з доданків?
- 90'.** У виразі перед дужками стоїть знак «-». Чи правильно розкрити дужки, якщо: 1) знак першого доданка поміняють, а знаки інших доданків збережуть; 2) знак першого й останнього доданків поміняють, а знаки інших доданків збережуть; 3) поміняють знаки кожного з доданків?
- 91'.** У виразі перед дужками стоїть знак «-». Скільки разів треба змінювати знаки доданків, якщо вираз у дужках містить: 1) два доданки; 2) три доданки; 3) п'ять доданків?
- 92'.** Чи є подібні доданки у виразі:
1) $5a + 3a$; 2) $a + 2b$; 3) $7c + 4 - 5c + 9$; 4) $6a + 7b - 9c$? Назвіть їх.

93°. У якому виразі взаємно знищуються доданки:

- 1) $4a + (-4a)$; 3) $-4a - 4a$; 5) $4a + 4a$;
 2) $-4a + 4a$; 4) $4a - 4a$; 6) $4a - 4?$

94°. Зведіть подібні доданки у виразі:

- 1) $12a + 23a$; 3) $16n + 4n + 12$; 5) $14p - 10p - 16p$;
 2) $46c - c$; 4) $12m + m + 4m$; 6) $0,8k + 10,2k - 4,5$.



95°. Зведіть подібні доданки у виразі:

- 1) $16a - 9a$; 3) $15c - 12 + 5c$; 2) $3b + 12b - 16b$; 4) $15x - 8x - 12x$.

96°. Спростіть вираз:

- 1) $0,2a \cdot 6$; 3) $-3m \cdot 4n$; 5) $-8a \cdot (-0,4bc)$;
 2) $7c \cdot 0,5d$; 4) $10x \cdot (-1,1yz)$; 6) $12t \cdot 5p \cdot (-4k)$.



97°. Спростіть вираз:

- 1) $a \cdot 14b$; 3) $-5m \cdot 1,4n$;
 2) $0,2c \cdot 8d$; 4) $-7xy \cdot (-0,5z)$.

98°. Розкрийте дужки:

- 1) $2 \cdot (a - 4)$; 7) $-x \cdot (5 - y)$;
 2) $1,5 \cdot (b + 2)$; 8) $(12a + 5) \cdot (-b)$;
 3) $-5 \cdot (6 - c)$; 9) $-6x \cdot (y - 3)$;
 4) $-0,4 \cdot (d + 2)$; 10) $(2n - m) \cdot (-5p)$;
 5) $a \cdot (8 - 1,2b)$; 11) $3t \cdot (5p + k + 6)$;
 6) $(n - 0,5) \cdot m$; 12) $(2p - 4k + 6t) \cdot 2a$.



99°. Розкрийте дужки:

- 1) $7 \cdot (a - 2)$; 4) $-n \cdot (0,5 - m)$;
 2) $-0,2 \cdot (b - 15)$; 5) $2x \cdot (-5 + y)$;
 3) $c \cdot (d - 10)$; 6) $(3a - 2b + 1) \cdot (-c)$.

100°. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

- 1) $a - (a - b)$; 4) $2(k + p) - 3(k - p)$;
 2) $4c + (5c - 4d)$; 5) $-5(x - y + z) + 4(-x + y - z)$;
 3) $(n - m) - (m - n)$; 6) $c - (b - a) + (a - b - c)$.



101°. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

- 1) $(c - d) - 2d$; 3) $4(a - b) - 2(b - a)$;
 2) $2x - (3y - 2x)$; 4) $(n - 3m) - (4n - 6m)$.

102°. Чи є тотожно рівними вирази:

- 1) $4a \cdot 8b$ і $32ab$;
 2) $4c + 2c + 6$ і $6c + 6d$;
 3) $0,5 + 2n$ і $0,5 \cdot 4n$;
 4) $9m + 5 + m - 4m$ і $12m + 10 - 6m - 5$;

- 5) $7xy : y$ і $7x$;
 6) $12cd : 2cd$ і $6cd : cd$?

 **103°.** Чи є тотожно рівними вирази:

- 1) $5a + 6a$ і $11a$; 3) $5ab : a$ і $5b$;
 2) $12c \cdot 2d$ і $18cd$; 4) $(4n + 5n) : 3$ і $3n$?

104°. Які з виразів є тотожно рівними:

- 1) $2a + 2b$; 3) $2(a + b)$;
 2) $a + b + a + 2$; 4) $2a + b + b$?

105°. Винесіть спільний множник за дужки:


- 1) $11a + 11b$; 7) $-ax + 2bx$;
 2) $4c + 12d$; 8) $10a - 5b - 15c$;
 3) $6nm - 21m$; 9) $-4x - 12y - 8z$;
 4) $18n - 24m$; 10) $ay + by - 8y$;
 5) $2p + 12k - 8t$; 11) $-3n - 12m + 9p$;
 6) $pk + 12k + 6tk$; 12) $4a - 6b + 8c - 10$.

 **106°.** Винесіть спільний множник за дужки:

- 1) $6a - 6b$; 3) $3xy + 9x$;
 2) $-5c - 20d$; 4) $-4n - 6nm + 2np$.

107°. Спростіть вираз і знайдіть його значення:


- 1) $(2x - 1) - (1 - 4x)$, якщо $x = 0,25$;
 2) $(2 - 5x) + (6,4x + 2,8)$, якщо $x = -2,4$;
 3) $(8,5 - 6,2x) - \left(4\frac{1}{3} - 7\frac{2}{7}x\right)$, якщо $x = 11\frac{2}{3}$;
 4) $8x - \left(2\frac{5}{7} + 4,7x\right) + \left(4,7x - 6\frac{2}{7}\right)$, якщо $x = -5\frac{3}{8}$.

 **108°.** Спростіть вираз і знайдіть його значення:

- 1) $(5 - 14y) - (2,4 - 2,5y)$, якщо $y = -4$;
 2) $5\frac{5}{6} - \left(2,4y + 3\frac{1}{3}\right) + \left(2,5 - 1\frac{1}{3}y\right)$, якщо $y = \frac{5}{8}$.

109°. Замініть вираз на тотожно рівний:

- 1) $5a + 16a - 7b + 12b$; 5) $\frac{3}{7}p - 1\frac{4}{9}k - \frac{6}{7}p + k$;
 2) $25c - 31d - 23d + 12c$;
 3) $0,6m + 3,4n - 7,2n - 6,8m$;
 4) $7y - 3,5x - 4,5x + 13y$; 6) $12,5t - \frac{5}{12}t + 5,5 - \frac{1}{12}$.

 **110°.** Замініть вираз на тотожно рівний:

1) $12c + 14d - 4c - 23d$;

3) $\frac{5}{9}x - 4,5y + 2,5x + 5\frac{1}{3}y$;

2) $-5,6n + 3,4m + 4,5m - 7,2n$;

4) $2,8k + 1,4 - 7k + 4\frac{1}{5}k$.


111. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

1) $-3(m - 0,2n) + \frac{4}{5}(10n - 1,5m)$;

2) $0,3(n - 5m) - 1,2(-n - 1,25m)$;

3) $\left(4\frac{2}{5}n - 0,8m\right) \cdot 5 - 0,6\left(\frac{5}{6}n - 3,5m\right) + 4,5m$;

4) $-2,6(4m - 5n) + (10n - 5m) \cdot (-1,3) - (4,8n + 1,3m) \cdot 5$.

 **112.** Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

1) $6,4(2c - 0,5d) - 0,4(16c - 8d)$;

2) $0,9\left(3\frac{1}{3}d + 1\frac{2}{3}c\right) - (5,2c - d) \cdot \frac{1}{13} + 2,7c$.

113. Винесіть спільний множник за дужки:

1) $6ab - 4ac + 12ad$;

3) $\frac{4}{5}abc - \frac{8}{9}acd + 3\frac{1}{3}ack - 4apc$;

2) $-2,4mn + 1,6mp - 8mk$;

4) $-2,5xy + 1,5xyz - 5xyn + 3,5$.

 **114.** Винесіть спільний множник за дужки:

1) $4,9xy - 1,4xz + 7yz$;

2) $\frac{3}{7}abc - \frac{6}{11}abd + 1\frac{4}{5}abcd - 9$.

115. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $(5,4xy - 6,8xz + 4) - (3,2xy - 4,8xz + 5,8) - 2,2$, якщо $x = 1,5$;
 $y = -4$; $z = -0,2$;

2) $-20\left(0,2xy - 0,3x - \frac{2}{5}y\right) + (xy - 3y - 2x) \cdot 3$, якщо $x = -0,6$; $y = 0,4$;

3) $(2xy - 5xz) \cdot 0,4 - (xy + 3yz) \cdot 0,8 + (5xz - 2yz) \cdot (-0,2)$, якщо

$x = 3\frac{1}{3}$; $y = 1\frac{1}{4}$; $z = -12,6$;

4) $(x - y) \cdot z - (4x - z) \cdot y + (5y - 7z) \cdot x$, якщо $x = -2,4$; $y = 1,5$; $z = -1\frac{3}{5}$.



116. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $-4(0,5x + y) + 0,8(3x - 2z) - 6(0,4z - 0,1y)$, якщо $x = -5$; $y = 10$;

$$z = 5\frac{3}{4};$$

2) $(5x + 6y) \cdot 0,5z + (3x - 2z) \cdot 1,5y - (2,5z - y) \cdot x$, якщо $x = 5,2$; $y = 0,1$;

$$z = -6\frac{4}{11}.$$

117. Знайдіть значення виразу:

1) $4a + 12b$, якщо $a + 3b = 28$;

2) $7xz - 14yz$, якщо $x - 2y = 17$; $z = 0,4$;

3) $6ab - 8ac$, якщо $a = -0,12$; $3b - 4c = 5$;

4) $3xy - 0,6x + 0,9y$, якщо $x - 5xy - 1,5y = 1,25$.



118. Знайдіть значення виразу:

1) $15c - 3d$, якщо $5c - d = -3$;

2) $-12mn + 18mp$, якщо $m = 0,5$; $2n - 3p = -8$.

119. Складіть та спростіть вираз: 1) до добутку чисел a і b додати третю частину різниці чисел a і b ; 2) потроєну суму чисел a і b поділити на половину їх різниці. Знайдіть значення виразу, якщо $a = 5$, $b = -0,4$.



120. Складіть та спростіть вираз: потроєну різницю чисел c і d поділити на подвоєну їх суму. Знайдіть значення виразу, якщо $c = -2$, $d = 1,2$.

121*. Що потрібно вставити замість зірочок, щоб отримати тотожно рівні вирази?

1) $4a(* + 4,5c) = 10ab + *$;

3) $3,6ac - * = 6c(* - 3bc)$;

2) $* \left(\frac{2}{3}x - 1\frac{1}{6}y \right) = -4x + 7y$;

4) $* + 5\frac{2}{3}yz = \frac{1}{6}y(1,5xy + *)$.

122*. Складіть вираз для знаходження суми: 1) чотирьох послідовних натуральних чисел; 2) п'яти послідовних непарних натуральних чисел; 3) шести послідовних парних натуральних чисел; 4) трьох натуральних чисел, кратних 6.

123*. Відомо, що $\frac{a}{b} = 12$. Знайдіть значення виразів:

1) $\frac{a}{2b}$;

2) $\frac{3a}{b}$;

3) $\frac{4a}{3b}$.

124*. Знайдіть значення x , якщо:

1) $x - y = 5$, $\frac{y}{2} = -3$; 2) $x + 3y = 4$, $2x + 3y = 8$.

125*. Доведіть, що при виконанні рівності $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, виконується така рівність:

1) $\frac{a+2b}{b} = \frac{c+2d}{d}$; 3) $\frac{a+nb}{b} = \frac{c+nd}{d}$;

2) $\frac{nb-a}{b} = \frac{nd-c}{d}$; 4) $\frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}$.



ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

126. Купили 3 кг яблук, 2 кг груш і 4 кг слив. Складіть вираз для обчислення вартості фруктів, якщо ціна 1 кг: яблук — a грн, груш — b грн, слив — c грн.

127. Складіть вираз щодо витрат часу Тетянкою на виконання домашнього завдання, якщо: 1) на англійську мову витрачено a хв; 2) на математику — у 1,5 рази більше, ніж на виконання англійської мови; 3) на українську літературу — на 10 хв, більше, ніж на виконання математики. Скільки часу виконувала домашнє завдання Тетянка, якщо завдання з англійської мови вона виконала за 20 хв?

128. Складіть задачу, подібну до попередньої, за вашими власними витратами часу на виконання домашнього завдання.



ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

129. Знайдіть середнє арифметичне трьох послідовних натуральних чисел, менше з яких є найбільшим трицифровим числом.

130. Середнє арифметичне трьох чисел дорівнює 18. Знайдіть ці числа, якщо перше з них у 2 рази, а друге — у 1,5 рази більше за третє.

131. Розв'яжіть рівняння: 1) $\frac{2}{x} = \frac{-3}{9-2x}$; 2) $\frac{5y}{10-2y} = \frac{3}{0,8}$.

§ 4. ТОТОЖНІСТЬ

Ви знаєте, що два вирази зі змінними можуть бути тотожно рівними. Наприклад, такими є пари виразів $3a - a$ і $2a$, $3xy \cdot (-5z)$ і $-15xyz$, $55nm : 11$ і $5nm$ для будь-яких значень змінних, що входять до них. Якщо в кожній із цих пар вирази поєднати знаком «=», то дістанемо особливі рівності — *тотожності*, а саме: $3a - a = 2a$, $3xy \cdot (-5z) = -15xyz$, $55nm : 11 = 5nm$.

Запам'ятайте!

Рівність, ліва і права частини якої є тотожно рівними виразами, називається тотожністю.

Крім тотожностей зі змінними, вам вже зустрічалися й числові тотожності. Наприклад:

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4, \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4, \quad 3 \cdot (7 - 5) = 3 \cdot 2.$$

Кожна *тотожність стверджує*, що вирази в її лівій і правій частинах є тотожно рівними, тобто їх відповідні значення дорівнюють одне одному для кожного значення їх змінних. Якщо не відомо, чи є тотожно рівними вирази в лівій і правій частинах певної рівності, тоді цю рівність перевіряють на правильність, тобто *доводять тотожність* або спростовують її.

Довести тотожність — означає довести тотожну рівність її лівої і правої частин. Для доведення тотожностей використовують тотожні перетворення виразів.

Розпочинають доведення (чи спростування) тотожності з перевірки того, чи збігаються ОДЗ змінних виразів у її лівій і правій частинах.

Задача 1. Чи є тотожністю рівність $(a - 1) \cdot a : (a - 1) = a$?

Розв'язання. ОДЗ-1: $a \neq 1$, ОДЗ-2: a — будь-яке число. Оскільки ОДЗ змінних виразів у лівій і правій частинах рівності не збігаються, то дана рівність не є тотожністю.

Якщо ОДЗ змінних виразів у лівій і правій частинах рівності збігаються, тоді застосовують один із чотирьох *способів доведення тотожностей*. Розглянемо приклад.



Задача 2. Доведіть тотожність $3(b+2) - b = 3b + 5 - (b-1)$.

Розв'язання. ОДЗ-1: b — будь-яке число, ОДЗ-2: b — будь-яке число.

Спосіб 1 (перетворення лівої частини рівності).

Перетворимо вираз у лівій частині даної рівності так, щоб він набув вигляду виразу в її правій частині:

$$\begin{aligned} 3(b+2) - b &= \\ &= 3b + 6 - b = \\ &= 3b + 5 + 1 - b = \\ &= 3b + 5 - b + 1 = \\ &= 3b + 5 - (b-1). \end{aligned}$$

Отже, $3b + 5 - (b-1) = 3b + 5 - (b-1)$.

Звідси $3(b+2) - b = 3b + 5 - (b-1)$, що і вимагалось довести.

Спосіб 2 (перетворення правої частини рівності).

Перетворимо вираз у правій частині даної рівності так, щоб він набув вигляду виразу в її лівій частині:

$$\begin{aligned} 3b + 5 - (b-1) &= \\ &= 3b + 5 - b + 1 = \\ &= 3b + 6 - b = \\ &= 3(b+2) - b. \end{aligned}$$

Отже, $3(b+2) - b = 3(b+2) - b$.

Звідси $3(b+2) - b = 3b + 5 - (b-1)$, що і вимагалось довести.

Спосіб 3 (перетворення обох частин рівності).

Перетворимо вирази в обох частинах даної рівності так, щоб вони набули одного й того самого вигляду:

$$\begin{array}{ll} 3(b+2) - b = & 3b + 5 - (b-1) = \\ = 3b + 6 - b = & = 3b + 5 - b + 1 = \\ = 2b + 6. & = 2b + 6. \end{array}$$

Отже, $2b + 6 = 2b + 6$.

Звідси $3(b+2) - b = 3b + 5 - (b-1)$, що і вимагалось довести.

Спосіб 4 (різницеве порівняння). Перевіримо, чи дорівнює нулю різниця виразів у лівій і правій частинах даної рівності:

$$\begin{aligned} 3(b+2) - b - (3b + 5 - (b-1)) &= \\ &= 3b + 6 - b - (3b + 5 - b + 1) = \\ &= 2b + 6 - (2b + 6) = \\ &= 2b + 6 - 2b - 6 = 0. \end{aligned}$$

Звідси $3(b+2) - b = 3b + 5 - (b-1)$, що і вимагалось довести.



Чи можна спростувати тотожність, не перетворюючи виразів у її лівій і правій частинах? Так. Розглянемо приклад.



Задача 3. Чи є тотожністю рівність $0 \cdot x = x$?



Розв'язання. ОДЗ-1: x — будь-яке число, ОДЗ-2: x — будь-яке число. Перевіримо, чи справджується дана рівність, наприклад, для $x = 1$. Підставивши це значення x у вирази лівої і правої частин рівності, отримуємо, що вони набувають різних значень: $0 \cdot 1 \neq 1$, або $0 \neq 1$. Отже, дана рівність не є тотожністю.



Зверніть увагу:

щоб спростувати правильність рівності зі змінними, достатньо дібрати лише один набір значень змінних, за яких ліва і права її частини набувають різних значень.



Дізнайтеся більше

Доведення вважають єдиним способом встановлення істини в математиці. Проте так було не відразу. Спочатку в єгипетській і вавилонській математиці обчислювальні формули та математичні факти вгадувались, а потім експериментально перевірялись. Це вважали доказом їх істинності.

Необхідність доведення обґрунтував давньогрецький математик Евклід (III ст. до н. е.). Він вважав, що доведення мають бути логічними висновками з аксіом — тверджень, що приймають без доведення. У результаті з'явилися знамениті «Начала» Евкліда.

У 1939 р. виходить багатотомний трактат групи французьких математиків, які взяли для цього псевдонім Ніколя Бурбакі. Ось якою фразою відкривають Бурбакі свій трактат: «Із часів греків говорити «математика» — означає говорити «доведення». Відтоді математика і доведення — два слова, які вважають майже синонімами.

ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що таке тотожність?
2. Що означає — довести тотожність?
3. У чому суть способу перетворення лівої частини рівності?
4. Поясніть суть способу перетворення правої частини рівності.
5. У чому суть способу перетворення обох частин рівності?
6. Поясніть суть способу різницевого порівняння.
7. Як спростувати правильність рівності зі змінними?



РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

132'. Чи правильно, що тотожністю може бути:

1) вираз; 2) нерівність; 3) рівність?

133'. Чи правильно, що ліва і права частини тотожності мають бути:

1) нерівними виразами;
2) рівними виразами;
3) тотожно рівними виразами?

134'. Чи може бути тотожністю рівність, у якій:

1) ОДЗ-1 і ОДЗ-2 не збігаються;
2) ОДЗ-1 і ОДЗ-2 збігаються?

135'. Чи є тотожністю числова рівність? Якщо так, наведіть приклад.

136°. Чи може бути тотожністю запис:

1) $a \cdot 1 - a$; 3) $a \cdot a - a^2 = 0$; 5) $4a - 2a + a = 3a$;
2) $3a - 4a \neq 5a$; 4) $2a - 2 = a$; 6) $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$?



137°. Чи може бути тотожністю запис:

1) $b + 2 > 0$; 3) $-3b + 3b = 0$?
2) $b \cdot \frac{3}{4} - \frac{3b}{4}$; 4) $4b - 5b + 6b = 5b$;

138°. Чи правильно, що рівність $12 - (5 - 9) = 16$ є тотожністю? Відповідь поясніть.

139°. Що треба вставити замість *, щоб отримати тотожність:


1) $2b + b = *$; 3) $b \cdot b \cdot b = *$; 5) $5(8b - 6) = *$;
2) $b \cdot * = 0$; 4) $2b + * = 0$; 6) $\frac{9}{15} = \frac{*}{5}$?

140°. Що треба вставити замість *, щоб отримати тотожність:

1) $5a - * = 2a$; 3) $4 \cdot (a - 2) = *$;
2) $a \cdot * = 1$; 4) $7a + * = 0$?


141°. Доведіть тотожність за допомогою способу перетворення лівої частини рівності:

1) $10a - (6a - 9b) = 4a + 9b$;
2) $(0,7n - 0,6m) - 2(0,4n - 0,3m) = -0,1n$.

 **142°.** Доведіть тотожність за допомогою способу перетворення лівої частини рівності: $(17a - 6b) + 4(-5a + 4b) = -3a + 10b$.

143°. Доведіть тотожність за допомогою способу перетворення правої частини рівності:


1) $a = -1\frac{2}{7}(a - 7b) + 2\frac{2}{7}a - 9b$; 2) $c - d = 4(d - c) - 5(d - c)$.

 **144°.** Доведіть тотожність за допомогою способу перетворення правої частини рівності: $-6c = 0,8(5c - 3d) - 4(2,5c - 0,6d)$.

145°. Доведіть тотожність за допомогою способу перетворення обох частин рівності:

1) $12a - 4(3a - 7b) = (4a + b) - (4a - 27b)$;

2) $4,5m + \left(1\frac{1}{3}n + 2,5m\right) - 0,5n = 7\left(m - \frac{1}{7}n\right) + 1\frac{5}{6}n$.


 **146°.** Доведіть тотожність за допомогою способу перетворення обох частин рівності:

$$\left(2\frac{3}{4}m - 10,4n\right) - 4\left(\frac{3}{16}m - 1,6n\right) = -2(2n - m).$$

147°. Доведіть тотожність за допомогою способу різницевого порівняння:

1) $4,9a - 4(a - 0,6b) = 0,3(3a + 8b)$;

2) $\left(p - \frac{1}{3}k\right) - \left(3p - \frac{2}{3}k\right) = (k - 2p) - \frac{2}{3}k$.

 **148°.** Доведіть тотожність за допомогою способу різницевого порівняння: $18p - 4(2k + 5p) = -\frac{1}{2}(16k + 4p)$.

149. Чи є тотожністю рівність:

1) $5a - 2 = a + (4a - 2)$; 3) $(2x - 4y) : 2 = x - 2y$;

2) $14(b - b) = 14$; 4) $6m \cdot (4 + m) : 6mn = (4 + m) : n$?

 **150.** Чи є тотожністю рівність:

1) $-c + d - 2c + 2 = -3c + 3d$; 2) $(9k - 6k) : 3k = 3k$?

151. Доведіть чи спростуйте тотожність:

1) $a(b - c) - b(a - c) + c(a - b) = 0$;

2) $c(n + m) - c(m - n) = 2n(c + m) - 2mn$;

3) $4(p + 2k) - k(8 - 4p) = 4(k - 2p)$;

4) $1,2c(6 - 2p) = 0,8(9c + 6p) - p(2,4c - 4,8)$.



152. Доведіть чи спростуйте тотожність:

1) $a(b - c - d) + a(b + c + d) = 2ab$;

2) $-m(n + 4) + n(m + 4) = 4(m - n)$.

153. Доведіть тотожність $8(a - b) + 6(b - c) - 4(a - c) = 4a - 2(b + c)$ різними способами.



154. Доведіть тотожність $2(n + p) - 4m = 2(-n + m) - 6(m - p) + 4(n - p)$ різними способами.

155. Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної:

1) $12x - 5(5 + 3x) + 3(x + 4)$;

2) $8,5(y + 2) - 1,7(10 + 5y) - 15,5$;

3) $a(b - 4) + b(6 - a) - 2(3b - 2a)$;

4) $7 - 1\frac{1}{2}m + 6\left(\frac{1}{3}m - 5\frac{1}{3}n\right) - 0,5(m - 64n)$.



156. Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної:

1) $9(5 - y) + 6(y - 3) - 3(4 - y)$;

2) $m(n - 2,8) + n(4,2 - m) - 1,4(3n - 2m) - 6$.

157*. Доведіть, що $5a(3b - 2c) + 4b(2c - 3a) - 7c(-a + b) - bc = 15$, якщо $a(b - c) = 5$.

158*. Доведіть, що за будь яких a і b значення виразу $5a + 5b - (4b - 2 - 0,5(2a - 5b - 3(2a - 3b + 2(a + b))))$ дорівнює 2.

159*. Який вираз треба підставити замість зірочки, щоб отримати тотожність:

1) $2(a + b) - 2 \cdot * = 4b$;

2) $2(a + b) - 2 \cdot * = 0$;

3) $2(a + b) - 2 \cdot * = 4a + 4b$;

4) $2(a + b) - 2 \cdot * = 2a + 6b$;

5) $2(a + b) - 2 \cdot * = 4a - 4b$;

6) $2(a + b) - 2 \cdot * = 4b - 2a$?

160*. Доведіть, що середнє арифметичне трьох послідовних натуральних чисел дорівнює середньому із цих чисел.

161*. Доведіть, що середнє арифметичне десяти натуральних чисел не може дорівнювати 5,8.

**ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ**

- 162.** Сергійко з друзями вирушили в похід до бази відпочинку, яка розташована на відстані 250 км від їх міста. Вони планували спочатку 2 год йти пішки зі швидкістю 5 км/год, а потім 4 год їхати автобусом зі швидкістю 60 км/год. Проте швидкість їх руху під час пішої частини походу становила лише 4 км/год. Якою має бути швидкість автобуса, щоб хлопці вчасно потрапили на базу? Складіть числовий вираз для розв'язування задачі та обчисліть його значення.
- 163.** Одна ділянка землі має форму квадрата зі стороною a , а друга — форму прямокутника, довжина якого $2a$. Обидві ділянки огорожені. Яка з ділянок має довшу огорожу, якщо ділянки мають однакову площу? Складіть вираз для знаходження різниці довжин огорожей та знайдіть його значення, якщо $a = 80$ м.
- 164.** Клієнт поклав у банк n грн. Якою буде сума на його рахунку через 2 роки, якщо банк нараховує 15 % річних?
- 165.** Населення міста становить на сьогодні m тис. жителів та збільшується щороку на 3 %. Яким стане населення міста через 5 років?

**ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ**

- 166.** Обчисліть: 1) $3^4 + 2^2 \cdot 5^3$; 2) $(3^4 + 2^2) \cdot 5^3$.
- 167.** Порівняйте значення виразів $a^2 + b^2$ і $(a + b)^2$, якщо $a = 4$, $b = -5$.
- 168.** На уроці математики в 7-А класі присутні 30 учнів. Число учнів, які відсутні, становить $\frac{1}{16}$ загальної кількості учнів. Скільки учнів навчається в 7-А класі?
- 169.** На прем'єрному показі нового фільму діти становили $\frac{9}{25}$ усіх глядачів. Скільки відсотків від усіх глядачів становили діти?

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що називається числовим виразом; значенням числового виразу?
2. Назвіть дії першого ступеня, другого ступеня, третього ступеня.
3. Який порядок виконання дій у числовому виразі без дужок?
4. У якому порядку треба виконувати дії в числовому виразі з дужками?
5. У якому випадку числовий вираз не має змісту?
6. Який вираз називають виразом зі змінними?
7. Поясніть, як обчислити значення виразу зі змінними.
8. Що таке допустимі значення змінних для виразу зі змінними?
9. Які вирази називаються раціональними; цілими?
10. Які вирази називаються тотожно рівними?
11. Що таке тотожне перетворення виразу?
12. Для чого використовують тотожні перетворення виразів?
13. Як зводять подібні доданки?
14. Сформулюйте правила розкриття дужок.
15. Як виносять спільний множник за дужки?
16. Що таке тотожність? Що означає — довести тотожність?
17. У чому полягає суть способу доведення тотожності перетворенням її лівої частини; правої частини?
18. У чому полягає суть способу доведення тотожності перетворенням обох її частин?
19. Поясніть суть способу доведення тотожності способом різницевого порівняння.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ**ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ**

Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10–15 хв.

1°. Знайдіть значення виразу $10,5 : 5 - (3,4 + 2^2 \cdot 2,5)$.

- А.** 11,3. **Б.** -11,3. **В.** -13,3. **Г.** -18,5.

2°. Винесіть спільний множник за дужки у виразі:

$$0,4ab - 2ac + 3,6ad.$$

А. $a(0,4b - 2c + 3,6d)$. **В.** $2a(0,2b - c + 1,8d)$.

Б. $2a(0,4b - c + 3,6d)$. **Г.** $2a(0,2b - c + 3,6d)$.

3°. Спростіть вираз $4,5n + 12,4 - 2n - 1\frac{2}{9}n$.

А. $-1\frac{5}{9}n + 12,4$.

В. $12,4 - 1\frac{2}{9}n$.

Б. $13\frac{17}{45}n$.

Г. $1\frac{5}{9}n + 12,4$.

4. Знайдіть значення виразу $2\frac{1}{7}(14a + b) - (3b - 2,8a)$, якщо

$$a = -0,5 \text{ і } b = 2\frac{1}{3}.$$

А. -7,2. **Б.** 7,2. **В.** -11,4. **Г.** 11,4.

5*. Яке число треба поставити замість зірочки у рівності

$$* \left(4,5a - 1\frac{5}{6}b \right) = -9a + 3\frac{2}{3}b, \text{ щоб отримати тотожність?}$$

А. -0,2. **Б.** 2. **В.** -2. **Г.** -0,5.

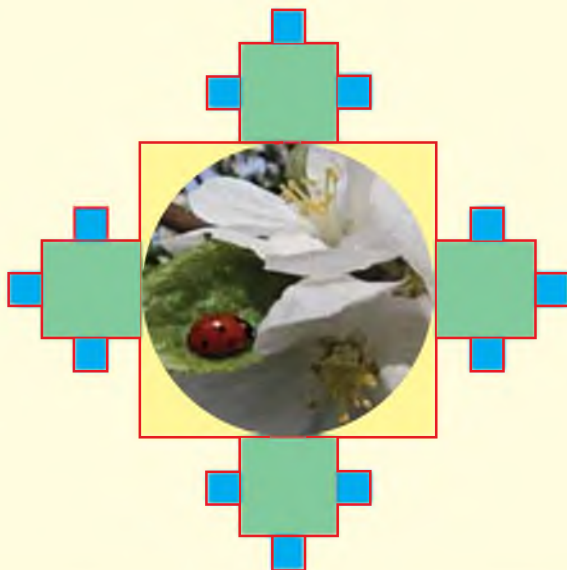
РОЗДІЛ

2

ОДНОЧЛЕНИ

У розділі дізнаєтесь:

- що таке степінь з натуральним показником;
- які властивості дій зі степенями;
- який вираз називають одночленом;
- як звести одночлен до стандартного вигляду;
- що таке степінь одночлена;
- як підносити до степеня та множити одночлени;
- як застосувати вивчений матеріал на практиці

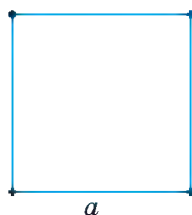


§ 5. СТЕПІНЬ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

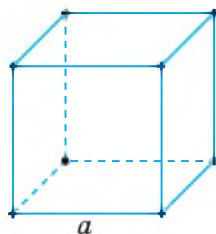
Подивіться на малюнки 3 і 4. Ви бачите квадрат зі стороною a (мал. 3) і куб з ребром a (мал. 4). Ви знаєте, як знайти площу квадрата й об'єм куба та як записати результат за допомогою відповідних виразів: a^2 і a^3 .

Узагалі, добуток n рівних множників, кожний з яких дорівнює a , можна записати за допомогою *степеня*: $\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множників}} = a^n$.

У виразі a^n число a називають *основою степеня*. Воно показує, яке число множили саме на себе. Число n називають *показником степеня*. Він показує, скільки рівних множників було в добутку. Оскільки для лічби множників використовують натуральні числа, то виразу a^n дали назву «ступінь з натуральним показником». Пізніше ви дізнаєтеся про степені з іншими показниками.



Мал. 3



Мал. 4

Запам'ятайте!

Степенем числа a з натуральним показником n , більшим за 1, називається добуток n множників, кожний із яких дорівнює a .


$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множників}}$$

Вираз a^n читають так: « a в степені n » або « n -ий ступінь числа a ».

Задача 1. Запишіть вираз $27 \cdot 3 \cdot 9$ у вигляді степеня з основою: 1) 3; 2) 9; 3) 27.

Розв'язання.

- 1) $27 \cdot 3 \cdot 9 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$;
- 2) $27 \cdot 3 \cdot 9 = 9 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 9 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3$;
- 3) $27 \cdot 3 \cdot 9 = 27 \cdot 27 = 27^2$.

 Чому в означення степеня з натуральним показником не включено показник 1? Тому що немає сенсу говорити про добуток, у якому лише один множник. Степінь із показником 1 визначають окремо.

Запам'ятайте!

Степенем числа a з показником 1 називається саме число a .

$$a^1 = a$$

Якщо основа степеня дорівнює 1, то значення степеня за будь-якого натурального n дорівнює 1:


$$1^n = 1.$$

Якщо основа степеня дорівнює 0, то значення степеня за будь-якого натурального n дорівнює 0:

$$0^n = 0.$$



Задача 2. Розв'яжіть рівняння: $(x + 5)^2 = 0$.

 **Розв'язання.** $(x + 5)^2 = 0$, $(x + 5) \cdot (x + 5) = 0$, $x + 5 = 0$, $x = -5$.



Зверніть увагу:

якщо значення степеня з натуральним показником дорівнює 0, то основа степеня дорівнює 0. Тобто, якщо $a^n = 0$, то $a = 0$.



Задача 3. Чи є рівними значення степенів:

1) 5^4 і $(-5)^4$; 2) 5^3 і $(-5)^3$?

 **Розв'язання.** Обчислимо значення даних виразів:

1) $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$, $(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 625$;

Отже, $5^4 = (-5)^4$.

2) $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$, $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$.

Отже, $5^3 \neq (-5)^3$.

Знак степеня залежить від знака основи степеня та від парності чи непарності показника степеня. Як ми побачили в задачі 3, добуток **парної** кількості **від'ємних** чисел є **додатним**, а добуток **непарної** кількості **від'ємних** чисел є **від'ємним**. Добуток будь-якої кількості (як парної, так і непарної) **додатних** чисел є **додатним**.

**Зверніть увагу:**

- 1) будь-який натуральний степінь додатного числа — число додатне:

$$a^n > 0, \text{ якщо } a > 0, n — \text{ натуральне число};$$

- 2) парний натуральний степінь від'ємного числа — число додатне:

$$a^n > 0, \text{ якщо } a < 0, n = 2k, k — \text{ натуральне число};$$

- 3) непарний натуральний степінь від'ємного числа — число від'ємне:

$$a^n < 0, \text{ якщо } a < 0, n = 2k - 1, k — \text{ натуральне число}.$$

Дію, за допомогою якої добуток рівних множників згортають у степінь, називають *піднесенням до степеня*. Це — п'ята арифметична дія, яка є дією *третього ступеня*. Під час обчислення значень виразів її виконують найпершою.



Задача 4. Обчисліть значення виразу $5x^2 + 10$ для $x = -3$.



Розв'язання. Підставимо у вираз $5x^2 + 10$ значення змінної -3 :

$$\begin{aligned} 5x^2 + 10 &= \\ &= 5 \cdot (-3)^2 + 10 = \\ &= 5 \cdot 9 + 10 = \\ &= 55. \end{aligned}$$

**Зверніть увагу:**

у виразах, що містять степені, спочатку виконують піднесення до степеня, а потім — множення, ділення, додавання, віднімання.

**Дізнайтеся більше**

Уперше натуральні степені чисел охарактеризував Діофант Александрийський. У своїй знаменитій «Арифметиці» він описує перші натуральні степені чисел так: «Серед чисел є квадрати, що отримані множенням числа самого на себе, ці числа називаються стороною квадрата; куби, що отримані множенням квадратів на їх сторону; квадрато-квадрати — від множення квадратів самих на себе; квадрато-куби, що отримані множенням квадрата на куб його сторони; кубо-куби — від множення кубів самих на себе».

ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що таке степінь числа; основа степеня; показник степеня?
2. Що означає піднести число a до степеня n ?
3. Чому дорівнює a в степені 1?
4. Чому дорівнює 1 в степені n ?
5. Чому дорівнює 0 в степені n ?
6. Який знак парного степеня додатного числа; від'ємного числа?
7. Який знак непарного степеня додатного числа; від'ємного числа?
8. Який порядок виконання дій у виразі, що містить степені?



РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

- 170'.** Чи правильно, що вираз a^n — це: 1) добуток чисел a і n ; 2) a -ий степінь числа n ; 3) n -ий степінь числа a ?
- 171'.** Чи правильно, що у виразі a^n число a показує: 1) скільки рівних множників було в добутку; 2) яке число множили саме на себе?
Як називається число a ?
- 172'.** Чи правильно, що у виразі a^n число n показує: 1) яке число множили саме на себе; 2) скільки рівних множників було в добутку?
Як називається число n ?
- 173'.** Прочитайте вираз:
1) 2^2 ; 2) $(-10)^3$; 3) $1,2^{10}$; 4) $\left(\frac{3}{4}\right)^4$; 5) $(-5)^5$; 6) 0^2 .
- Назвіть основу і показник степеня. Що вони показують?
- 174'.** Скільки разів взято множником число 0,5, якщо отримали степінь: 1) $0,5^2$; 2) $0,5^5$; 3) $0,5^n$; 4) $0,5^m$?
- 175'.** Запишіть у вигляді степеня:
1) $2 \cdot 2 \cdot 2$;
2) $(-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7)$;
3) $(-1,5) \cdot (-1,5) \cdot (-1,5) \cdot (-1,5)$.
- 176'.** Запишіть у вигляді добутку:
1) $(-15)^5$; 2) 10^4 ; 3) $(-4)^6$.

177'. Якими даними треба доповнити порожні клітинки таблиці 4?
Таблиця 4

Степень	2^2		7^8		$(-2,5)^3$		4^4		
Основа степеня		-5		0		0,9		1	$\frac{3}{5}$
Показник степеня		6		3		10		2	14
									3

178'. Чи є правильною рівність: 1) $1^n = -1$; 2) $0^n = n$; 3) $0^n = 0$; 4) $1^n = 1$?

179'. Обчисліть: 1) 0^6 ; 2) 0^{15} ; 3) 1^9 ; 4) 1^{100} .

180'. Чи правильно, що для від'ємного числа a :

- 1) a^n — від'ємне число;
- 2) a^n — від'ємне число, якщо n — парне натуральне число;
- 3) a^n — від'ємне число, якщо n — непарне натуральне число;
- 4) a^n — додатне число;
- 5) a^n — додатне число, якщо n — непарне натуральне число;
- 6) a^n — додатне число, якщо n — парне натуральне число?

181'. Чи правильно, що у виразах, які містять степені, спочатку виконують: 1) додавання; 2) віднімання; 3) множення; 4) ділення; 5) піднесення до степеня?

182°. Запишіть у вигляді степеня:

- 1) $(-n) \cdot (-n) \cdot (-n) \cdot (-n) \cdot (-n) \cdot (-n) \cdot (-n) \cdot (-n) \cdot (-n)$;
- 2) $-\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{-b} \cdot \frac{-a}{b}$;
- 3) $2a \cdot 2a \cdot 2a \cdot 2a \cdot 2a \cdot 2a \cdot 2a \cdot 2a \cdot 2a$.

183°. Обчисліть:


- | | | |
|-----------------|-----------------|-------------------------------------|
| 1) 2^6 ; | 6) $(-2)^3$; | 11) $\left(1\frac{1}{4}\right)^2$; |
| 2) $(-1,1)^2$; | 7) $(-3)^3$; | |
| 3) $(-4)^2$; | 8) 3^3 ; | 12) $\left(-\frac{5}{6}\right)^1$. |
| 4) $0,1^4$; | 9) $(-0,2)^6$; | |
| 5) $0,5^3$; | 10) $(-5)^3$; | |



184°. Обчисліть:

- | | | |
|-----------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $0,4^3$; | 5) $-\left(1\frac{1}{3}\right)^2$; | 6) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$. |
| 2) $(-6)^4$; | | |
| 3) $(-25)^1$; | | |
| 4) $(-0,1)^5$; | | |

185°. Знайдіть a^2 , якщо a дорівнює: 1) 10; 2) $-0,1$; 3) -4 ; 4) $\frac{1}{5}$.

 **186°.** Знайдіть m^3 , якщо m дорівнює: 1) 10; 2) $-0,1$; 3) -4 ; 4) $\frac{1}{5}$.


187°. Знайдіть:

- 1) суму квадратів чисел $5, -2$ і -4 ;
- 2) різницю кубів чисел -10 і 5 ;
- 3) суму квадрата числа 6 і четвертого степеня числа -3 .

 **188°.** Знайдіть:

- 1) суму квадратів чисел $-1, 6$ і -3 ;
- 2) квадрат суми чисел $-1, 6$ і -3 ;
- 3) різницю кубів чисел 5 і -7 ;
- 4) куб різниці чисел 5 і -7 .

189°. Запишіть у вигляді степеня число: 1) 4; 2) 9; 3) 16; 4) 5.
Скільки розв'язків має задача?

 **190°.** Запишіть у вигляді степеня число: 1) 100; 2) 49; 3) 64; 4) 2.
Скільки розв'язків має задача?

191°. Обчисліть:

- | | | |
|---------------|-----------------|---------------------|
| 1) 0^3 ; | 3) 0^{71} ; | 5) $1^3 + 0^{22}$; |
| 2) 1^{12} ; | 4) -1^{111} ; | 6) $0^5 - (-1)^9$. |

192°. Розв'яжіть рівняння:

- | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------------|
| 1) $x^5 = 0$; | 3) $(-x)^2 = 0$; | 5) $(6 + 5x)^{25} = 0$; |
| 2) $(x + 1)^3 = 0$; | 4) $(8 - x)^9 = 0$; | 6) $(4x + 20)^{111} = 0$. |

 **193°.** Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^8 = 0$; 2) $(15 + x)^{13} = 0$; 3) $(9 - 6x)^2 = 0$; 4) $(0,1x + 8)^{17} = 0$.

194°. Dodatним чи від'ємним є значення степеня:

- 1) $(-8)^8$; 2) 10^7 ; 3) $\left(\frac{2}{5}\right)^7$; 4) $(-3,6)^5$; 5) $(-1)^9$; 6) $\left(-\frac{4}{7}\right)^6$?

195°. Поставте знак $<$, $>$, $=$ між виразами:

- | | | |
|--|-----------------------------|------------------------|
| 1) 12^3 і 0 ; | 4) 1^{23} і $(-1)^{32}$; | 7) $(-2)^6$ і 2^6 ; |
| 2) $(-2)^5$ і $(-5)^2$; | 5) 23^1 і 32^1 ; | 8) -2^6 і 2^6 ; |
| 3) $(-7,2)^5$ і 0^3 ; | 6) 80 і 3^4 ; | 9) -2^6 і $(-2)^6$; |
| 10) $0,5^3$ і $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; | | |
| 11) $-0,2^6$ і $(-0,2) \cdot (-0,2) \cdot (-0,2) \cdot (-0,2) \cdot (-0,2) \cdot (-0,2)$. | | |

 **196°.** Порівняйте значення виразів:

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1) $(-4)^4$ і 4^4 ; | 3) $(-1)^5$ і 1^5 ; | 5) $(-1)^6$ і 1^6 ; |
| 2) $(-4)^3$ і 4^3 ; | 4) 1^7 і 1^9 ; | 6) 0^3 і 0^{11} . |

197°. Обчисліть:

1) $11^1 \cdot (-1)^{11}$;

3) $-(-3)^4 + 3^4 + 10^3 \cdot 1^6$;

2) $0^{11} \cdot (-4)^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^4$;

4) $(-1)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 1^{20}$.

 **198°.** Обчисліть:

1) $34^3 \cdot 0^{12}$;

3) $-(-1)^3 + 5^2 - 2^4$;

2) $-(-2)^5 - 2^5 + 1^3 \cdot 3^1$;

4) $(-16)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 0^4$.

199°. Обчисліть:

1) $(-6)^3 + (-6^2) \cdot 3$;

3) $-6 + 6 \cdot 3^2$;

2) $(-6^3 + 6^2) \cdot 3$;

4) $-6 + (-6) \cdot 3^2$.

 **200°.** Обчисліть:

1) $(-10)^3 + (-1^2)$;

3) $(-12 + 8^2) : (-2)$;

2) $((-5)^3 + 5^2) : 10$;

4) $(-12 + 8)^2 \cdot (-2)$.

201°. Розв'яжіть рівняння:

1) $2 \cdot 3^2 - x = 25$;

2) $4x = 8^2$;

3) $3^4 + x = (-9)^2$.

202. Запишіть у вигляді степеня з основою 5:

1) $25 \cdot 5$; 2) $5 \cdot 25 \cdot 125$; 3) $25 \cdot 25 \cdot 125 \cdot 125 \cdot 125 \cdot 25$.

 **203.** Запишіть у вигляді степеня з основою 2:

1) $8 \cdot 4$;

2) $2 \cdot 4 \cdot 16$;


3) $32 \cdot 2 \cdot 64$.

204. Запишіть вираз $4 \cdot 64 \cdot 16$ у вигляді степеня з основою:

1) 2;

2) 4;

3) 16.


 **205.** Запишіть вираз $2 \cdot 8 \cdot 16$ у вигляді степеня з основою:

1) 2;

2) 4;


3) 16.

206. Знайдіть a^4 , якщо a дорівнює: 1) -2 ; 2) $-0,3$; 3) $\frac{1}{2}$.

 **207.** Знайдіть m^5 , якщо m дорівнює: 1) $0,2$; 2) -3 ; 3) $-\frac{2}{3}$.

208. Знайдіть значення виразу $(a + b)^2$, якщо:

1) $a = 2, b = -2, 1$; 2) $a = -\frac{1}{3}, b = -1\frac{2}{3}$; 3) $a = \frac{4}{5}, b = 2,2$.

 **209.** Знайдіть значення виразу $a^2 + b^2$, якщо:

1) $a = 2, b = -2, 1$; 2) $a = -\frac{1}{3}, b = -1\frac{2}{3}$; 3) $a = \frac{4}{5}, b = -2,2$.

210. Знайдіть різницю куба суми квадратів чисел -2 і 3 та квадрата суми кубів цих чисел.

211. Знайдіть число, квадрат якого дорівнює:

1) 0,16; 2) 0,0025; 3) $\frac{16}{121}$; 4) $1\frac{69}{100}$; 5) 1,44.



212. Куб якого числа дорівнює: 1) -8 ; 2) 0,125; 3) $-\frac{1}{125}$?

213. Обчисліть: 1) $-3 \cdot (-5)^3 + 12 \cdot (-14)^2 - 4^4 \cdot 3^2$;

2) $\left[(-2)^4 \cdot (-5)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \right] : \left(2,2 - \frac{1}{5}\right)^3$;

3) $-2^3 \cdot (-5)^2 \cdot (-2)^2 \cdot (-5)^3 \cdot (64 - 8^2)^7$.



214. Обчисліть: 1) $0,5^2 + (-0,1)^2 \cdot 6^3$; 3) $(-0,4)^2 + 0,3^2 \cdot (-1)^3 + 3^2$;
2) $(0,5^2 + (-0,1)^2) \cdot 6^3$; 4) $((-0,4)^2 + 0,3^2) \cdot ((-1)^3 + 3^2)$.

215. Число 9065 можна записати як суму розрядних доданків:
 $9065 = 9 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 5$. Запишіть у такому вигляді число:
1) 253608; 2) 22000.

216. Обчисліть: 1) $10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5$;
2) $5 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5$.



217. Знайдіть суму чисел:

1) $2 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 2$ і $5 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 5$;

2) $9 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^1$ і $5 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 3$.

218. Визначте знак виразу:

1) $-(-4)^{15} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^6$; 2) $-9^5 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right)^6$; 3) $(-0,01)^{23} \cdot (-1)^8 \cdot 56^{65}$.

219. Запишіть у порядку зростання числа: $(-0,2)^2$, $(-0,2)^3$, $\left(\frac{1}{5}\right)^1$,
 $-(-0,2)^2$ і $-(-0,2)^3$.

220. Чи може a^2 бути меншим, ніж a ? Наведіть приклад.

221. За якого натурального значення n виконується нерівність:

1) $(-6)^2 < 3^n < \left(\frac{1}{0,1}\right)^2$;

2) $0^3 \leq 0,5^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3$?

222. Розв'яжіть рівняння:

1) $(1,2 - 3x)^4 = 0$;

5) $x^8 \cdot (15 - x)^8 = 0$;

2) $(2 - x)^3 = 0$;

6) $(7,2 + 8x)^5 \cdot \left(\frac{1}{12} - 2x\right)^2 = 0$;

3) $2^3 \cdot x^3 \cdot (-x)^3 = 0$;

7) $|x - 5| \cdot (x - 6)^{99} = 0$;

4) $(1 - x)^6 \cdot (9 + x)^{12} = 0$;

8) $|x + 1|^3 \cdot (x - 10)^{10} = 0$.

223*. Запишіть у вигляді степеня вираз:

$$1) 0,01 \cdot \frac{9}{25} \cdot 2 \frac{4}{25} \cdot 10;$$

$$2) 0,125 \cdot \frac{1}{8} \cdot 0,5 \cdot 0,25;$$

$$3) 0,09 \cdot 0,09 \cdot 0,09 \cdot (-0,3) \cdot (-0,3) \cdot (-0,3);$$

$$4) 4 \cdot 27 \cdot 9 \cdot 64 \cdot 3 \cdot 16;$$

$$5) -\frac{5}{8} \cdot (-0,4) \cdot (-0,064) \cdot \frac{4}{125}.$$

224*. За якого значення a вираз $|-a|^n$ для всіх натуральних значень n є: 1) додатним; 2) недодатним; 3) невід'ємним?

225*. За якого значення a вираз $(|-a| + a)^n$ для всіх натуральних значень n дорівнює: 1) нулю; 2) одиниці?

226*. Визначте знак виразу:

$$1) a^3 \cdot (-a)^4, \text{ якщо } a < 0; \quad 2) a^2 + 32; \quad 3) (-a)^7 \cdot (-a)^8, \text{ якщо } a > 0.$$

227*. Знайдіть значення виразу $(a^2 - 1) \cdot (a^3 - 1) \cdot (a^4 - 1) \cdot \dots \cdot (a^{100} - 1)$, якщо: 1) $a = -1$; 2) $a = 1$; 3) $a = 0$.

228*. Знайдіть значення виразу $(a^2 - 1) \cdot (a^2 - 2) \cdot (a^2 - 3) \cdot \dots \cdot (a^2 - 100)$, якщо: 1) $a = 8$; 2) $a = -6$.

229*. Спростіть вираз: 1) $1^1 + (-1)^2 + 1^3 + (-1)^4 + \dots + 1^{19} + (-1)^{20}$;
2) $(-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{20}$.

230*. Знайдіть найменше значення виразу:

$$1) a^2 - 4; \quad 2) (a + 3)^6 + 3; \quad 3) |(-a)^3| + 98.$$

231*. Розв'яжіть рівняння:

$$1) (36 - x) \cdot (4^3 - 8^2) = 0;$$

$$2) \left(2\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (2^5 - x) = \frac{1}{0,2^3}; \quad 3) 12x = 6^3 \cdot \left(\frac{1^3}{6^2} + \left(\frac{1}{6}\right)^2\right),$$

232*. Розв'яжіть рівняння:

$$1) (3 - x)^2 + (x - 2)^6 = 0; \quad 3) (2 - x)^2 + |x - 2| = 0;$$

$$2) (100 + x)^{100} + (x + 10^2)^{10} = 0; \quad 4) (5 - x)^4 + (x + 5)^4 = 0.$$

233*. Квадрат числа складається з цифр 6, 5 і 2. Знайдіть це число.

234*. Доведіть: 1) $11^{10} - 1$ ділиться на 10; 2) $10^{10} + 5$ ділиться на 3.

235*. Доведіть: 1) $41^5 - 1$ ділиться на 10; 2) $10^5 + 17$ ділиться на 9.

236*. Доведіть, що вираз $\frac{10^n + 8}{9}$ є натуральним числом для будь-якого натурального n .



ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

- 237.** Три кімнати мають форму квадратів зі сторонами відповідно a , b і c . Знайдіть суму площ чотирьох кімнат, якщо площа найбільшої з них дорівнює сумі площ трьох інших.
- 238.** Дванадцяткова система числення була створена ще стародавніми шумерійцями (5 тис. до н. е.). Елементом такої системи нині може служити лічба дюжинами. Перший, другий і третій степені числа 12 мають власні назви: 1 дюжина = 12 штук, 1 gros = = 12 дюжин, 1 маса = 12 grosів. Скільки штук: 1) в 1 масі; 2) в 1 grosі?



ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

- 239.** Знайдіть значення виразу:
 1) $|-280| + 15756 : 26 - 906$; 2) $8585 : 101 - |-17| \cdot 5$.
- 240.** Обчисліть: 1) 4 % числа 8,25; 2) 15 % числа 5,24.
- 241.** Пристань A розміщена нижче за течією річки від пристані B на 70 км. Швидкість човна у стоячій воді дорівнює 30 км/год, а швидкість течії річки — 5 км/год. Знайдіть час, за який човен подолає: 1) шлях від A до B ; 2) шлях від B до A .

§ 6. ДІЇ ЗІ СТЕПЕНЯМИ

Ви знаєте, що додавання і віднімання — це дії першого ступеня, множення і ділення — дії другого ступеня, а піднесення до степеня — дія третього ступеня. Зі степенями можна виконувати всі ці дії. Наприклад:

$$3^3 + 3^2 = 27 + 9 = 36,$$

$$3^3 - 3^2 = 27 - 9 = 18,$$

$$3^3 \cdot 3^2 = 27 \cdot 9 = 243,$$

$$3^3 : 3^2 = 27 : 9 = 3,$$

$$(3^3)^2 = 27^2 = 729.$$

Проте безпосередні обчислення не завжди легко виконувати, наприклад, якщо основа і показник кожного зі степенів — великі числа. Якщо ж степені задано в буквенному вигляді, тоді безпосередні обчислення взагалі незастосовні.

Тут дії зі степенями виконують на основі *властивостей степенів*. При цьому розрізняють два випадки: 1) рівні основи; 2) різні основи.

1. Дії першого ступеня зі степенями

Для степенів як з рівними, так і з різними основами виконуються переставний і сполучний закони додавання.

2. Дії другого ступеня зі степенями

Для степенів як з рівними, так і з різними основами виконуються переставний і сполучний закони множення, а також розподільний закон множення відносно додавання.

Інші властивості дій другого ступеня зі степенями дозволяють згортати в один степінь добуток (або частку) двох степенів. Розглянемо спочатку степені з рівними основами.

Запам'ятайте!

Теорема 1 (основна властивість степенів).

Добуток двох степенів з рівними основами дорівнює степеню з тією ж основою і показником, що дорівнює сумі показників множників:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Д а н о: a^n , a^m , де a — будь-яке число, n і m — натуральні числа.

Д о в е с т и: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

Д о в е д е н н я. Спираючись на означення степеня, спочатку розгорнемо кожний степінь у добуток, а потім згорнемо отриманий результат у степінь:

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n+m} = a^{n+m}.$$

n множників m множників $n+m$ множників

Отже, $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

? Чи можна застосувати основну властивість степенів до множення кількох степенів з однією основою? Так. Наприклад:

$$a^n \cdot a^m \cdot a^k = (a^n \cdot a^m) \cdot a^k = a^{n+m} \cdot a^k = a^{n+m+k}.$$

Запам'ятайте!

Теорема 2 (властивість частки степенів із рівними основами).

Частка двох степенів з рівними основами, відмінними від нуля, дорівнює степеню з тією ж основою і показником, що дорівнює різниці показників діленого і дільника:

$$a^n : a^m = a^{n-m} \quad (n > m).$$

Дано: a^n, a^m , де $a \neq 0$, n і m — натуральні числа, $n > m$.

Довести: $a^n : a^m = a^{n-m}$.

Доведення. Спираючись на означення степеня, спочатку розгорнемо кожний степінь у добуток:

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ множників}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ множників}}}.$$

Оскільки $n > m$ і для $a \neq 0$ $\frac{a}{a} = 1$, то в отриманому виразі можна виділити m множників $\frac{a}{a}$, що дорівнюють 1, і $n - m$ множників, що дорівнюють a :

$$\begin{aligned} a^n : a^m &= \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ множників}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ множників}}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ множників}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n-m \text{ множників}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ множників}}} = \\ &= \underbrace{\frac{a}{a} \cdot \frac{a}{a} \cdot \dots \cdot \frac{a}{a}}_{m \text{ множників}} \cdot \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n-m \text{ множників}} = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{m \text{ множників}} \cdot \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n-m \text{ множників}} = \\ &= \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n-m \text{ множників}}. \end{aligned}$$

За означенням степеня:

$$\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n-m \text{ множників}} = a^{n-m}.$$

Отже, $a^n : a^m = a^{n-m}$.

? Чому в теоремі 2 на показники степенів накладено обмеження $n > m$? Тому що для $n \leq m$ у частці дістанемо степінь, показник якого не є натуральним числом.

Зверніть увагу:

дії **другого ступеня** зі степенями, що мають рівні основи, зводяться до відповідних **дій першого ступеня** з їх показниками:

- **множення степенів** — до **додавання їх показників**;
- **ділення степенів** — до **віднімання їх показників**.

Запам'ятайте!

Теорема 3 (властивість добутку степенів із різними основами і рівними показниками).

Добуток n -их степенів чисел a і b дорівнює n -му степеню добутку ab :

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n.$$

Д а н о: a^n , b^n , a і b — будь-які числа, n — натуральне число.

Д о в е с т и: $a^n \cdot b^n = (ab)^n$.

Д о в е д е н н я. Спираючись на означення степеня, спочатку розгорнемо кожний степінь у добуток, перегрупуємо множники, а потім згорнемо отриманий результат у степінь:

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_n = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \dots \cdot (ab)}_n = (ab)^n.$$

Отже, $a^n \cdot b^n = (ab)^n$.

Сформулюємо без доведення *властивість степеня добутку* двох чисел: **n -й степінь добутку чисел a і b дорівнює добутку їх n -их степенів.** Тобто для будь-яких чисел a і b :

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

Розглянемо властивість ділення степенів.

Запам'ятайте!

Теорема 4 (властивість частки степенів із різними основами і рівними показниками).

Частка n -их степенів чисел a і b ($b \neq 0$) дорівнює n -му

степеню частки $\frac{a}{b}$:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Дано: a^n, b^n, a — будь-яке число, $b \neq 0, n$ — натуральне число.

Довести: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$

Доведення. Спираючись на означення степеня, розгорнемо в добуток степені, що є відповідно діленим і дільником:

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ множників}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ множників}}}.$$

Перегрупуємо компоненти отриманого виразу і застосуємо означення степеня:

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ множників}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ множників}}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Отже, $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$

Сформулюємо без доведення *властивість степеня частки* двох чисел: n -й степінь частки чисел a і b ($b \neq 0$) дорівнює частці їх n -их степенів. Тобто для будь-якого числа a і $b \neq 0$:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ або } (a : b)^n = a^n : b^n.$$

3. Дії третього ступеня зі степенями

Ви знаєте, що до дій третього ступеня належить дія піднесення до степеня. Степені також можна підносити до степеня з натуральним показником. Розглянемо властивість такої дії.

Запам'ятайте!

Теорема 5

(властивість піднесення степеня до степеня).

Для степеня з показником m його n -й степінь дорівнює степеню з тією ж основою і показником mn :

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Дано: a^m , $(a^m)^n$, де m і n — натуральні числа.

Довести: $(a^m)^n = a^{mn}$.

Доведення. Скористаємось означенням та основною властивістю степеня. Тоді дістанемо:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n \text{ множників}} = a^{\overbrace{m+m+\dots+m}^{n \text{ доданків}}} = a^{mn}.$$

Отже, $(a^m)^n = a^{mn}$.

У виразі $(a^m)^n$ показники m і n називатимемо відповідно внутрішнім і зовнішнім показниками.

Зверніть увагу:

Дія третього ступеня зі степенем зводиться до відповідної дії другого ступеня із внутрішнім і зовнішнім показниками:

піднесення степеня до степеня — до множення двох показників.



Дізнайтеся більше

Михайло Пилипович Кравчук (1892–1942) — український математик, академік АН УРСР (з 1929), доктор фізико-математичних наук (з 1924), професор Київського Політехнічного інституту. Народився в селі Човницях на Волині в сім'ї землеміра.

М. П. Кравчук був учителем багатьох видатних людей минулого століття: Архипа Люльки — конструктора реактивних авіадвигунів, Сергія Корольова — конструктора космічних кораблів, академіка Володимира Челомея. Методи М. П. Кравчука були використані в США, Японії та інших країнах для моделювання кібернетичної техніки, а також для створення першого у світі комп'ютера. М. П. Кравчук був співавтором першого тритомного словника української математичної термінології.



ПРИГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Які дії зі степенями можна виконувати?
2. Які закони справджуються для дій зі степенями першого ступеня; другого ступеня?
3. Яка основна властивість степенів? Доведіть її.
4. Сформулюйте і доведіть властивість частки степенів з рівними основами.
5. Яка властивість добутку степенів з різними основами і рівними показниками? Доведіть її.
6. Сформулюйте і доведіть властивість частки степенів з різними основами і рівними показниками.
7. Яка властивість піднесення степеня до степеня? Доведіть її.



РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

242'. Яка з формул є правильною:

1) $b^n \cdot b^m = 2b^{n \cdot m}$; 2) $b^n \cdot b^m = b^{n \cdot m}$; 3) $b^n \cdot b^m = b^{n+m}$?

243'. Назвіть показник степеня, якому дорівнює добуток степенів:

1) $5^3 \cdot 5^2$; 2) $6^6 \cdot 6^{10}$; 3) $7 \cdot 7^4$; 4) $8^2 \cdot 8^2$.

244'. Яка з формул є правильною:

1) $c^n : c^m = c^{n \cdot m}$; 2) $c^n : c^m = c^{n:m}$; 3) $c^n : c^m = c^{n-m}$?

245'. Назвіть показник степеня, якому дорівнює частка степенів:

1) $5^3 : 5^2$; 2) $6^{10} : 6^6$; 3) $7^4 : 7$; 4) $8^2 : 8^2$.

246'. Назвіть основу степеня, якому дорівнює добуток степенів:

1) $4^3 \cdot 2^3$; 2) $3^6 \cdot 12^6$; 3) $16^{10} \cdot 2^{10}$; 4) $8^2 \cdot 8^2$.

247'. Чи є правильною рівність:

- 1) $(12 + 4)^3 = 12^3 + 4^3$; 3) $(12 \cdot 4)^3 = 12^3 + 4^3$;
 2) $(12 + 4)^3 = 12^3 \cdot 4^3$; 4) $(12 \cdot 4)^3 = 12^3 \cdot 4^3$?

248'. Назвіть основу степеня, якому дорівнює частка степенів:

- 1) $4^3 : 2^3$; 2) $12^6 : 3^6$; 3) $16^{10} : 2^{10}$; 4) $8^2 : 8^2$.

249'. Чи є правильною рівність:

- 1) $(12 - 4)^3 = 12^3 - 4^3$; 3) $(12 : 4)^3 = 12^3 - 4^3$;
 2) $(12 - 4)^3 = 12^3 : 4^3$; 4) $(12 : 4)^3 = 12^3 : 4^3$?

250'. Яка з формул є правильною:

- 1) $(d^n)^m = d^{n+m}$; 2) $(d^n)^m = d^{n-m}$; 3) $(d^n)^m = d^{n:m}$; 4) $(d^n)^m = d^{n \cdot m}$?

251'. Назвіть показник степеня, якому дорівнює степінь степеня:

- 1) $(5^3)^2$; 2) $(6^6)^{10}$; 3) $(7^1)^4$; 4) $(8^2)^2$.

252°. Запишіть у вигляді степеня з основою 2:


- 1) $2^8 \cdot 2^3$; 2) $2^5 \cdot 2^6 \cdot 2^{10}$; 3) $2 \cdot 2^{13} \cdot 2^{16}$; 4) $2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 \cdot 2^8 \cdot 2^{10}$.

 **253°.** Запишіть у вигляді степеня з основою 8:

- 1) $8^5 \cdot 8$; 2) $8^{16} \cdot 8^9 \cdot 8^{20}$; 3) $8^3 \cdot 8^3 \cdot 8^4$.

254°. Запишіть у вигляді степеня добутку:

- 1) $10^7 \cdot 10^5$; 8) $(-xy)^5 \cdot (-xy)^8 \cdot (-xy)^{32}$;
 2) $0,3 \cdot 0,3^2$;
 3) $(-4,5)^{33} \cdot (-4,5)^{44} \cdot (-4,5)^{55}$; 9) $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^3$ ($b \neq 0$);
 4) $-4 \cdot (-4)^9$;
 5) $a \cdot a^{54} \cdot a^{36} \cdot a \cdot a^8$;
 6) $(-n)^4 \cdot (-n)^4 \cdot (-n)^4$; 10) $\left(\frac{2}{3b}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3b}\right)^{102} \cdot \left(\frac{2}{3b}\right)^{202}$ ($b \neq 0$).
 7) $2,1^4 \cdot 2,1^3 \cdot 2\frac{1}{10}$;


 **255°.** Запишіть у вигляді степеня добутку:

- 1) $5^4 \cdot 5^3 \cdot 5^6$; 6) $a \cdot a^{67} \cdot a^3 \cdot a \cdot a$;
 2) $0,01 \cdot 0,01^9$; 7) $(-x)^2 \cdot (-x)^{15} \cdot (-x)^{23}$;
 3) $c^2 \cdot c^8$;
 4) $(-p)^3 \cdot (-p)^{27}$;
 5) $m^4 \cdot m^7 \cdot m^{12}$; 8) $\frac{a}{c} \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^6 \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^4$ ($c \neq 0$).

256°. Запишіть у вигляді добутку степенів:

- 1) 5^{m+n} ; 2) 10^{n+p} ; 3) $0,8^{n+m+1}$.

257°. Подайте степінь a^{64} у вигляді добутку двох степенів, один з яких: 1) a^{32} ; 2) a^{62} ; 3) a^{14} ; 4) a^{30} .

 **258°.** Подайте степінь m^{25} у вигляді добутку двох степенів, один з яких: 1) m^2 ; 2) m^5 ; 3) m^{15} ; 4) m^{24} .

 **259°.** Запишіть у вигляді степеня з основою 11:

- 1) $11^{14} : 11^4$; 2) $11^{10} : 11^6 : 11^1$; 3) $11^{25} : 11^{13} : 11^{11}$.



260°. Запишіть у вигляді степеня з основою 8:

1) $8^5 : 8$; 2) $8^{16} : 8^9 : 8^2$; 3) $8^8 : 8^3 : 8^4$.

261°. Обчисліть: 1) $\frac{5^9}{5^7}$; 2) $(0,2)^{14} : \left(\frac{1}{5}\right)^{10}$; 3) $\frac{(-0,6)^{22}}{(-0,6)^{20}}$; 4) $(-7)^8 : (-7)^5$.

262°. Запишіть у вигляді степеня частку:

1) $\frac{7^{19}}{7^3}$; 2) $\frac{0,9^{24}}{0,9^4}$; 3) $\frac{a^{25}}{a^{11}}$ ($a \neq 0$); 4) $\frac{(-c)^{51}}{(-c)^{49}}$ ($c \neq 0$).

263°. Запишіть у вигляді частки степенів: 1) 2^{n-m} ; 2) 9^{n-3} ; 3) 100^{10-m} .

264°. Запишіть у вигляді степеня з основою 0,1:

1) $0,1^9 \cdot 0,1^{15} : 0,1^6$; 2) $\frac{0,1^{10} \cdot 0,1^3}{0,1^5}$; 3) $\frac{0,1^{100} \cdot 0,1^{200}}{0,1^{80} \cdot 0,1^{170}}$.



265°. Запишіть у вигляді степеня з основою 5:

1) $5^6 \cdot 5^9 : 5^3$; 2) $\frac{5^7 \cdot 5^4}{5^9}$; 3) $\frac{5^{25} \cdot 5^{25}}{5^{12} \cdot 5^8}$.

266°. Запишіть у вигляді степеня з основою 12:

1) $2^5 \cdot 6^5$; 2) $3^7 \cdot 4^7$; 3) $2^4 \cdot 2^4 \cdot 3^4$.



267°. Запишіть у вигляді степеня з основою 30:

1) $3^{21} \cdot 10^{21}$; 2) $6^9 \cdot 5^9$; 3) $2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^6$.

268°. Знайдіть *, якщо:

1) $24^5 = 2^5 \cdot (*)^5$; 2) $36^7 = 6^7 \cdot (*)^7$; 3) $36^2 = 2^2 \cdot (*)^2 \cdot 9^2$.



269°. Знайдіть *, якщо:

1) $100^{11} = 2^{11} \cdot (*)^{11}$; 2) $100^8 = 25^8 \cdot (*)^8$; 3) $100^{34} = 2^{34} \cdot (*)^{34} \cdot 5^{34}$.

270°. Запишіть у вигляді степеня з основою 2:

1) $12^8 : 6^8$; 2) $6^7 : 3^7$; 3) $16^4 : 8^4$; 4) $\frac{14^{11}}{7^{11}}$



271°. Запишіть у вигляді степеня з основою 3:

1) $15^{10} : 5^{10}$; 2) $27^3 : 9^3$; 3) $42^5 : 14^5$.

272°. Обчисліть:

1) $(-6 \cdot 0,3)^3 : (-6)^3$; 2) $(4 \cdot 3)^3 : 12^2$; 3) $\frac{18^{20}}{9^{19} \cdot 2^{19}}$; 4) $\frac{22^5}{11^5}$.



273°. Обчисліть:

1) $(5 \cdot 8)^4 : (8)^4$; 2) $(2 \cdot 0,25)^5 : 0,25^5$; 3) $\frac{64^{42}}{32^{42} \cdot 2^{42}}$.

274°. Запишіть у вигляді степеня: 1) $(a^3)^2$; 2) $(a^5)^{10}$; 3) $(m^4)^6$; 4) $(c^m)^2$.

275°. Запишіть у вигляді степеня:

1) $(3^5)^{10}$; 2) $((-4)^{11})^9$; 3) $((-3,5)^{10})^4$; 4) $((-1)^4)^{13}$; 5) $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^7\right)^8$.



276°. Обчисліть: 1) $((-2)^2)^3$; 2) $((-10)^2)^3$; 3) $((-1)^5)^3$.

277°. Знайдіть a^6 , якщо a^3 дорівнює: 1) 10; 2) -2; 3) -0,3; 4) $\frac{1}{2}$.

278°. Знайдіть n :

1) $(235)^{36} = (235^n)^9$;

3) $(4,5)^{36} = (4,5^2)^n$;

2) $(8)^{36} = (8^n)^6$;

4) $(5,09)^{36} = (5,09^n)^2$.

279°. Поставте знак $<$, $>$, $=$ між виразами:

1) $((-2)^5)^3$ і $((-2)^5)^2$;

3) $(-1,7)^5$ і $(0^2)^2$;

2) $((-2)^5)^2$ і $((-2)^2)^5$;

4) $((-1)^5)^2$ і $(-1)^{32}$.

280°. Запишіть у вигляді степеня з основою 3:

1) $(3^3)^5 \cdot 3^2 \cdot 3^{12}$; 2) $\frac{(3^{10})^4 \cdot 3^7}{(3^{15})^2}$; 3) $\frac{3^{11} \cdot (3^4)^5}{3^{21} \cdot 3^3}$.



281°. Запишіть у вигляді степеня з основою 8:

1) $(8^{11})^8 \cdot (8^7)^{10}$; 2) $\frac{(8^9)^2 \cdot 8^5}{(8^7)^3}$; 3) $\frac{8 \cdot 8^5 \cdot (8^2)^3}{8^{14} \cdot (8^5)^2}$.

282. Запишіть у вигляді степеня з основою 0,5:

1) $0,25 \cdot 0,125$; 2) $0,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$; 3) $0,00625 \cdot 2 \cdot 5$.

283. Запишіть у вигляді степеня з основою -2:

1) $-8 \cdot 4$; 2) $-2 \cdot 4 \cdot 16$; 3) $-32 \cdot 64$.

284. Запишіть у вигляді степеня:

1) $(-20)^4 \cdot 20^3$;

3) $a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot \dots \cdot a^8$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (-0,5)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$;

4) $a^2 \cdot a^4 \cdot \dots \cdot a^{10}$.

285. Подайте степінь a^{30} у вигляді частки двох степенів, якщо дільник дорівнює: 1) a^8 ; 2) a^5 ; 3) a^{15} ; 4) a^{29} .


286. Знайдіть x , якщо $b \neq 0$, $a \neq 0$ і:

1) $a^{12}b^{36} = a^2b^{10} \cdot x$;

3) $a^{12}b^{36} = a^{22}b^{36} \cdot x$;

2) $a^{12}b^{36} = a^4b^6 \cdot x$;

4) $a^{12}b^{36} = a^{100}b^{100} \cdot x$.

 287. Знайдіть x , якщо $b \neq 0$, $a \neq 0$ і:

1) $a^{12}b^{36} = ab \cdot x$;

3) $a^{12}b^{36} = x : ab$;

2) $a^{12}b^{36} = b^{30} \cdot x$;

4) $a^{12}b^{36} = x : b^{30}$.

288. Знайдіть значення виразу $a^2 \cdot b^2$, якщо:

1) $a = 27$, $b = -\frac{1}{54}$;

2) $a = -36$, $b = -1\frac{1}{9}$.

289. Знайдіть добуток:

1) $2,5 \cdot 10^3$ см і $2 \cdot 10^2$ м;

3) $5,4 \cdot 10^3$ кг і $1,5 \cdot 10^{10}$;

2) $8 \cdot 10^9$ м і $0,1 \cdot 10^3$ км;

4) $122 \cdot 10^8$ г і $0,5 \cdot 10^4$.

290. Знайдіть частку:

1) $6 \cdot 10^3$ м і $3 \cdot 10^2$ см;

3) 10^4 кг і $5 \cdot 10^7$ г;

2) 10^6 см і $0,1 \cdot 10^3$ м;

4) $4,8 \cdot 10^6$ г і $0,3 \cdot 10^4$.

 291. Знайдіть значення виразу $(a \cdot b)^3 : c^3$, якщо:

1) $a = 7$, $b = -6,5$, $c = 45,5$;

2) $a = \frac{5}{7}$, $b = 6\frac{3}{10}$, $c = 4,5$.

292. Запишіть вираз у вигляді степеня:

1) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 0,25 \cdot 4^{12}$;

4) $5^{14} \cdot 0,01^8 \cdot 5^2 \cdot 0,01^8$;

2) $8 \cdot 0,3^2 \cdot 8^5 \cdot 0,3^4$;

5) $\left(\frac{5}{13}\right)^{65} \cdot \left(2\frac{3}{5}\right)^{35}$;

3) $\left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^{11}$;

6) $\left(\frac{4}{17}\right)^{42} \cdot 4,25^{12}$.

293. Винесіть за дужки 3^n :

1) $3^{8n} + 3^{n+6}$;

2) $3^n - 2 \cdot 3^{2n}$;

3) $3^{3n+5} + 3^{n+1}$.

 294. Винесіть за дужки 2^n :

1) $2^{5n} + 2^{n+1}$;

2) $2^n - 2^n \cdot 2^{2n}$;

3) $2^{5n+2} - 3 \cdot 2^{n+3}$.

295. Подайте степінь 5^{12} у вигляді степеня з основою:

1) 5^6 ;

2) 5^2 ;

3) 5^3 ;

4) 5^4 .

296. Подайте степінь 4^{42} у вигляді степеня з основою:

1) 4^7 ;

2) $(-4)^6$;

3) 16;

4) 64.

297. Знайдіть m^{12} , якщо m^2 дорівнює:

1) 10;

2) 0,1;

3) $\frac{1}{2}$.

 298. Знайдіть c^6 , якщо c^3 дорівнює:

1) -10;

2) 0,1;

3) $-\frac{1}{5}$.

299. Запишіть у вигляді степеня:

$$1) ((2^2)^3)^4; \quad 2) \left(\left(\frac{1}{2} \right)^4 \right)^2; \quad 3) \left(\left(3\frac{1}{3} \right)^5 \right)^3; \quad 4) \left(\left(\frac{1}{6} \right)^2 \right)^3.$$

300. Спростіть вираз:

$$1) ((2a^5)^2 \cdot a^3)^6 \cdot 0,5a^2; \quad (4a^{10})^3 \quad (a \neq 0);$$

$$2) ((6a^4)^2 \cdot c^3 \cdot a^6)^2 : (27a^4 \cdot (4c)^3) \quad (c \neq 0, a \neq 0);$$

$$3) \frac{(a^5 \cdot b^4)^3 \cdot a^{25}}{b^9 \cdot (a^{14} : a^8)^2} \quad (b \neq 0, a \neq 0); \quad 4) \frac{a^9 \cdot b^{13} \cdot (a^9)^4}{b^9 \cdot (a^{10} : a^8)^5} \quad (b \neq 0, a \neq 0).$$



301. Спростіть вираз:

$$1) (a^{15} a^4)^3 : (a^{10} a^3)^2 \quad (a \neq 0); \quad 3) (a^{15} : a^4)^3 \cdot (a^{10} : a^3)^2 \quad (a \neq 0);$$

$$2) (a^{15} a^4)^3 \cdot (a^{10} a^3)^2; \quad 4) (a^{15} : a^4)^3 : (a^{10} : a^3)^2 \quad (a \neq 0).$$

302. Обчисліть:

$$1) -5 \cdot ((-5)^3)^4 : 25^5 \cdot (-10)^2; \quad 3) \left(\frac{3}{7} \right)^4 \cdot \left(-\frac{49}{9} \right)^2;$$

$$2) ((-1)^3)^7 : 5^4 \cdot ((-50)^2)^2; \quad 4) -2^3 \cdot (-5)^2 \cdot (-2^2) \cdot (-5)^3.$$

303. Запишіть у вигляді степеня:

$$1) (a^8)^n : (a^n)^6 \quad (a \neq 0); \quad 3) \frac{(c^5 \cdot c)^{4n}}{c^{10n}} \cdot (c^{5n+2})^2 \quad (c \neq 0);$$

$$2) (x^m)^n \cdot (x^n)^p; \quad 4) (a^{2+n})^n \cdot a^{n(1-n)} : (-a)^{2n} \quad (a \neq 0).$$

304. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 67(x^8 \cdot (-x)^8)^3 = 0; \quad 2) ((16 + 4x)^2)^5 = 0.$$



305. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 5^3 \cdot (x^3 \cdot (-x)^3)^5 = 0; \quad 2) ((1,2 - 3x)^4)^6 = 0.$$

306. Порівняйте значення виразів:

$$1) ((-4)^3)^5 \text{ і } ((-4)^5)^7; \quad 2) -9^8 \text{ і } (-3)^3; \quad 3) 5^{30} \text{ і } 3^{50}; \quad 4) 10^8 \text{ і } 9^{12}.$$

307. Визначте знак виразу:

$$1) ((-a)^3 \cdot (-a)^5)^7, \text{ якщо } a < 0;$$

$$2) (-x)^3 \cdot (-x \cdot y^3)^{15}, \text{ якщо } x < 0, y > 0.$$

308. Якою цифрою закінчується число:

$$1) 5^{45}; \quad 2) 10^{23}; \quad 3) 6^{10}; \quad 4) 111^{222?}$$

309*. Винесіть за дужки a^n :

$$1) 2a^n + a^{4n+2}; \quad 2) a^{2n}c + a^{n+10} + a^n.$$

310*. Знайдіть знаменник дробу $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2000}{19^{106}}$ після скорочення.

311*. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \left(\frac{5}{13}\right)^4 \cdot 5,2^4 - x = 2; \quad 3) 81^2 - x^2 = 34^4 - 17^4 \cdot 2^4;$$

$$2) x : 7^3 = \left(\frac{4}{7}\right)^3 \cdot (-0,25)^3; \quad 4) -12x = 6^7 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^5 \cdot 0,75^5.$$

312*. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 5x = (-1,6)^4 : (0,8^4 : 0,5^4); \quad 3) 4^8 = (36^7 : 9^7) \cdot x^2;$$

$$2) 0,5^5 : \left(\frac{1}{4}\right)^5 = 32x; \quad 4) 0,125 \cdot \frac{1}{8^2} x = \left(2\frac{1}{8}\right)^3 : 17^3.$$

313*. Знайдіть значення виразу

$$((a^1)^{100}) - 1) \cdot ((a^2)^{50}) - 1) \cdot ((a^4)^{25}) - 1) \cdot ((a^5)^{20}) - 1) \cdot ((a^{10})^{10}) - 1) \cdot ((a^{20})^{50}) - 1) \cdot ((a^{25})^4) - 1) \cdot ((a^{50})^2) - 1) \cdot ((a^{100})^1) - 1), \text{ якщо:}$$

$$1) a = -1; 2) a = 1; 3) a = 0.$$

314*. Доведіть, що число 3^{2015} закінчується цифрою 7.

315*. Якою цифрою закінчується число:

$$1) 209^{209}; 2) 2013^8; 3) 27^{22}; 4) 44^5?$$

316*. Порівняйте значення виразів:

$$1) 36^8 \text{ і } 4^8 \cdot 3^7; \quad 3) 15^{20} \text{ і } 9^9 \cdot 5^{21}; \quad 5) 28^{12} \text{ і } 9^{18};$$

$$2) 6^{15} \cdot 2^{17} \text{ і } 4^{14} \cdot 3^{16}; \quad 4) 4^9 \cdot 6^{12} \text{ і } 8^{11} \cdot 3^8; \quad 6) 11^{24} \text{ і } 5^{36}.$$

317*. Обчисліть $\frac{2^{19} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}}$.



ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

318. Відстань від Землі до Сонця $150 \cdot 10^6$ км. За який час світло подолає цю відстань, якщо швидкість світла у вакуумі дорівнює $3 \cdot 10^8$ м/с?

319. Апогей — це найбільш можлива відстань від Землі до Місяця. Вона становить близько $4 \cdot 10^5$ км. За який час космічний апарат, що рухається зі швидкістю $2 \cdot 10^8$ м/год, подолає цю відстань?



ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ

320. Знайдіть значення виразу:

$$1) \left(\frac{13}{44} - \frac{2}{11} - \frac{5}{66} : 2\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{5} : \left(3,2 + 0,8 \left(5,5 - 3\frac{1}{4}\right)\right);$$

$$2) 43,75 : 11\frac{2}{3} + 12\frac{4}{5} \cdot 3\frac{3}{4} - 23,4 : 1,8.$$

321. Знайдіть різницю виразу $a - c$ і числа p , якщо:

1) $a = 93,06$, $c = 21,65$, $p = 103,06$;

2) $a = 340,5$, $c = 20,05$, $p = 214,5$.

322. У прямокутнику зі сторонами 10 дм і 20 дм кожную сторону збільшили на 50 %. Якого периметра прямокутник одержали.

323. У трикутнику зі сторонами 10 см, 8 см і 6 см кожную сторону зменшили на 20 %. На скільки сантиметрів зменшився периметр трикутника?

§ 7. ОДНОЧЛЕН. ДІЇ З ОДНОЧЛЕНАМИ

Ви вже знаєте, що таке числовий вираз і вираз зі змінними, які вирази називають сумою, різницею, добутком, часткою, натуральним степенем чисел (чи змінних), які вирази відносяться до цілих виразів.

Запам'ятайте!

Цілий вираз, що є добутком чисел, змінних та їх натуральних степенів, називається *одночленом*.

Наприклад, кожен із добутків $5 \cdot 5$, $32a$, xy , $32axy$, x^2 , $9 \cdot (-x^2)$ є одночленом.

Самі числа, змінні та їх натуральні степені також вважають одночленами. Наприклад, 5 , -5 , a , x^2 , $-x^2$ — одночлени. Їх називають *найпростішими одночленами*.

? Чи можна вважати одночленом вираз $5 \cdot \frac{1}{x}$? Ні, оскільки даний вираз не задовольняє означення одночлена.

З одночленами можна виконувати дії всіх трьох ступенів — додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня. Розглянемо властивості цих дій.

1. Дії першого ступеня з одночленами

Додавання одночленів підкоряється переставному і сполучному законам. Наприклад, $7x + xy = xy + 7x$, $(7x + xy) + 2 = 7x + (xy + 2)$. Ці рівності є правильними для будь-яких значень змінних.

- — — упорядкована 203
- піднесення до степеня 45
- площина координатна 148
- початок координат 147
- правила розкриття дужок 25
- пряма пропорційність 176
- Рівність** зі змінною 187
- рівняння 187
 - корінь 187
 - лінійне з двома змінними 204
 - — — однією змінною 195
 - лінійного коефіцієнти 195
 - — вільний член 195
 - першого степеня 196
 - рівносильні 188, 205
 - розв'язати 188
- розв'язок лінійного рівняння з двома змінними загальний 203
 - системи двох лінійних рівнянь із двома змінними 220
- Система** двох лінійних рівнянь із двома змінними 219
- система координат
 - прямокутна 147
- систему рівнянь розв'язати 220
- спосіб задання функції аналітичний 141
 - — — графічний 142
 - — — описовий 141
 - — — табличний 141
- розв'язування задач алгебраїчний 197
- — системи рівнянь графічний 220
 - — — додавання 226
 - — — підстановки 226
- способи доведення тотожностей 33
 - розв'язування системи рівнянь аналітичні 226
 - розкладання многочлена на множники 125
 - степеня основа 43
 - показник 43
 - ступінь 43
 - Теорема** про добуток різниці двох одночленів і неповного квадрата їх суми 118
 - — — суми і різниці двох одночленів 110
 - — — — двох одночленів і неповного квадрата їх різниці 117
 - — квадрат різниці двох одночленів 101
 - — — суми двох одночленів 100
 - тотожність 33
 - точки координати на площині 148
 - тричлен 77
 - Формула** різниці квадратів 110
 - — кубів 119
 - суми кубів 119
 - формули скороченого множення 101
 - функції аргумент 140
 - значення 140
 - функції область визначення 141
 - — значень 141
 - функція 140
 - зростаюча 152
 - лінійна 162
 - спадна 152
 - Чверті** координатні 149

ЗМІСТ

Дорогі учні	3
-------------------	---

Розділ 1. ВИРАЗИ І ТОТОЖНОСТІ



§ 1. Числові вирази	5
§ 2. Вирази зі змінними	14
§ 3. Перетворення виразів	23
§ 4. Тотожність	33
Перевірте, як засвоїли матеріал	40

Розділ 2. ОДНОЧЛЕНИ



§ 5. Степінь з натуральним показником	43
§ 6. Дії зі степенями	52
§ 7. Одночлен. Дії з одночленами	65
Перевірте, як засвоїли матеріал	74

Розділ 3. МНОГОЧЛЕНИ



§ 8. Многочлен та його стандартний вигляд	77
§ 9. Додавання і віднімання многочленів	85
§ 10. Множення многочленів	92
§ 11. Квадрат двочлена	100
§ 12. Різниця квадратів	109
§ 13. Сума і різниця кубів	117
§ 14. Розкладання многочленів на множники ...	125
Перевірте, як засвоїли матеріал	136

Розділ 4. ФУНКЦІЇ



§ 15. Що таке функція	139
§ 16. Координатна площина. Графік функції	147
§ 17. Лінійна функція	162
§ 18. Пряма пропорційність	176
Перевірте, як засвоїли матеріал	184

Розділ 5. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ



§ 19. Рівняння.	
Властивості рівносильності рівнянь	187
§ 20. Лінійне рівняння з однією змінною	195
§ 21. Лінійне рівняння з двома змінними	203
§ 22. Графік лінійного рівняння	
з двома змінними	210
§ 23. Система двох лінійних рівнянь	
із двома змінними	219
§ 24. Аналітичні способи розв'язування систем	
лінійних рівнянь із двома змінними.	226
Перевірте, як засвоїли матеріал.	240

ПОВТОРЕННЯ

Теоретичні відомості	242
Задачі і вправи для повторення.	259
Відповіді	277
Предметний покажчик	287